

# UJIAN KUALIFIKASI

Program Doktor Teknik Sipil

Jawaban Soal Ujian Tertulis



Wiryanto Dewobroto

NPM : 2003832003

PROGRAM PASCASARJANA  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

8 – 15 Februari 2006

## KATA PENGANTAR

'Karya tulis ilmiah' ini merupakan jawaban terhadap materi Soal Ujian Kualifikasi tertulis yang diberikan sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan **Tahapan Pra-Doktoral** di Program Doktor Teknik Sipil, Universitas Katolik Parahyangan.

Setelah dinyatakan lulus dari Tahapan Pra-Doktoral maka dapat dilanjutkan ke dalam Tahapan Doktoral, dimana dalam tahapan tersebut, peserta program doktor berhak melanjutkan dengan pemilihan topik penelitian, penelitian dan penulisan disertasi. Tentu saja sebelumnya perlu dilakukan Penentuan Promotor Disertasi.

Oleh karena itu, materi karya tulis ini sangat berharga sekali khususnya bagi peserta program doktor karena menjadi bukti tertulis apakah yang bersangkutan mempunyai kualifikasi yang mencukupi untuk tetap eksis dalam studi menempuh jenjang doktor.

Tanpa terasa Tahapan Pra-Doktoral perlu penulis tempuh selama  $\pm$  dua tahun, yaitu awal tahun 2004 dan sekarang awal 2006 baru berhasil maju dalam ujian ini. Selama itu, banyak sekali perubahan yang penulis rasakan khususnya dalam hal pemikiran intelektual. Meskipun secara fisik dari luar tidak mudah untuk dilihat, tetapi jika publikasi dapat dijadikan indikasi tentang intelektualitas tersebut maka akan terlihat perbedaan yang menyolok antara produktivitasnya sebelum dan sesudah menempuh program doktoral ini. Menurut pendapat penulis, perubahan itu merupakan hal yang sangat penting dalam studi doktoral, selain tentu saja gelar formal **Doktor** nantinya.

Untuk itu penulis ingin mengucapkan terima kasih atas segala sesuatu yang penulis dapatkan sewaktu menempuh Tahapan Pra-Doktoral di UNPAR, khususnya kepada Prof. Moh. Sahari Besari, Prof. Bambang Suryoatmono, Prof. Paulus P. Rahardjo, Prof. Aziz Djajaputra, Dr. P. Kartawidjaja, Dr. Cecilia L.G.S. dan Dr. Iswandi Imran. Juga tentu saja kepada rekan-rekan S2 dan S3 di UNPAR yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu. Semoga Tuhan selalu memberi berkat dan perlindungan-Nya.

Akhirnya, atas berkat dan kemurahan dari Tuhan Allah sajalah maka 'karya tulis ilmiah' ini dapat penulis selesaikan. Segala daya dan upaya telah penulis usahakan untuk menghasilkan karya yang terbaik. Meskipun demikian penulis sadar akan keterbatasan yang dimilikinya, jadi bila ada kekurangannya mohon dimaklumi.

Semoga 'karya tulis ilmiah' ini dapat dijadikan bahan pertimbangan dalam mengevaluasi kesiapan penulis untuk menempuh **Tahapan Doktoral** di UNPAR.

Semoga Tuhan berkenan.

Ciumbuleuit, 14 Februari 2006



Wiryanto Dewobroto (NPM 2003832003)

**CATATAN** : Soal UK diambil pada hari Rabu 8 Feb. 2006, oleh karena itu batas waktu pengumpulan (1 minggu pengerjaan) adalah hari Rabu 15 Feb. 2006. Jadwal tersebut sedikit berbeda dengan jadwal pengumpulan yang tercantum pada Form UK5, tetapi hal tersebut sudah dikonsultasikan dan disetujui oleh Prof. Bambang (by SMS).



UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
PROGRAM PASCASARJANA

---

Kepada : Yth. Kepala Program Doktor Ilmu Teknik Sipil

Hal : Ujian tertulis dari Ujian Kualifikasi

Lamp. : Makalah ujian kualifikasi

Dengan hormat,

Bersama ini saya sampaikan jawaban soal ujian tertulis dalam rangka Ujian Kualifikasi.

Dalam surat ini saya juga menyatakan bahwa jawaban soal terlampir adalah benar pekerjaan saya. Bila ternyata tidak demikian, saya bersedia dinyatakan tidak lulus dalam Ujian Kualifikasi dan segera mengundurkan diri sebagai mahasiswa Program S3 di Universitas Katolik Parahyangan.

Bandung, 14 Februari 2006

Mahasiswa peserta Ujian Kualifikasi,

**Wiryanto Dewobroto / 2003832002**

---

Tembusan kepada:

Yth. Direktur Program Pascasarjana, u.p. Asisten Direktur Bidang Akademik



**UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
PROGRAM PASCASARJANA**

Jalan Ciumbuleuit No. 94 Telp. (022) 2032655 Bandung 40141  
e-mail : pasca@home.unpar.ac.id

**50<sup>th</sup>**

**KEPUTUSAN  
DIREKTUR PROGRAM PASCASARJANA  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
No.: III/PPS/2006-01/030-SK  
tentang**

**PELAKSANAAN UJIAN KUALIFIKASI PROGRAM DOKTOR**

Direktur Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan:

- Membaca : Surat Permohonan untuk menempuh Ujian Kualifikasi oleh peserta didik : Wiryanto Dewobroto; NPM: 2003832003 tertanggal 20 Januari 2006 yang disetujui oleh Kepala Program Doktor Ilmu Teknik Sipil Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan.
- Menimbang : a. bahwa salah satu persyaratan untuk penyusunan disertasi adalah melalui Ujian Kualifikasi  
b. bahwa untuk Ujian Kualifikasi diperlukan Panitia Ujian Kualifikasi yang dibentuk melalui suatu Keputusan.
- Mengingat : 1. Surat Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia No.212/U/1999 tentang Pedoman Penyelenggaraan Program Doktor  
2. Keputusan Direktur Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan Nomor III/PPS/2002-07/64-SK tentang Disertasi di Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan  
3. Keputusan Direktur Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan Nomor III/PPS/2002-10/95-SK tentang Tatacara Pelaksanaan Ujian Tesis/Disertasi di Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan  
4. Keputusan Direktur Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan Nomor III/PPS/2005-04/106-SK tentang Proses dan Penilaian Matakuliah Disertasi di Program Doktor Universitas Katolik Parahyangan  
5. Panduan Akademik Program Pascasarjana Universitas Katolik Parahyangan

**MEMUTUSKAN**

Menetapkan :

- Pertama : Membentuk Panitia Ujian Kualifikasi Program Doktor Ilmu Teknik Sipil, yang terdiri dari :
- |  |                 |
|--|-----------------|
| 1. Prof. Dr. A. Aziz Djajaputra, Ir., MSCE     | sebagai Ketua   |
| 2. Prof. Moh. Sahari Besari, Ir., M.Sc., Ph.D. | sebagai Anggota |
| 3. Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D.            | sebagai Anggota |
| 4. Dr. Paulus Kartawijaya, Ir., MT             | sebagai Anggota |
| 5. Dr. Cecilia Lauw Giok Swan, Ir., M.Sc.      | sebagai Anggota |
- Ke dua : Menugaskan panitia tersebut pada diktum pertama untuk
1. melaksanakan Ujian Kualifikasi bagi peserta didik : Wiryanto Dewobroto; NPM: 2003832003
  2. melaporkan hasilnya segera setelah pelaksanaan Ujian Kualifikasi tersebut

Ditetapkan di: Bandung  
pada tanggal: 26 Januari 2006

Program Pascasarjana Unpar,  
Direktur,



Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D.



UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
PROGRAM PASCASARJANA

---

Kepada : Yth. Sdr. Wiryanto Dewobroto

NPM: 2003832003

Hal : Ujian Kualifikasi

Lamp. : 1. Soal ujian tertulis  
2. Form UK6

Dengan hormat,

Terlampir adalah soal bagi ujian tertulis dari Ujian Kualifikasi Saudara.

Saudara diberi waktu untuk menyelesaikannya dalam waktu 1 minggu / ~~2 bulan~~\* setelah tanggal surat ini (selambat-lambatnya tanggal 13 Februari 2006).

Form UK6 terlampir harap digunakan sebagai pengantar penyerahan jawaban Saudara atas ujian tertulis ini.

Bandung, 3 Februari 2006

Program Pascasarjana UNPAR

Prof. Dr. Aziz Djajaputra, Ir., MSCE  
Kepala Program Doktor Ilmu Teknik Sipil

\* coret yang tidak perlu

Tembusan kepada:

Yth. Direktur Program Pascasarjana, u.p. Asisten Direktur Bidang Akademik



**UJIAN KUALIFIKASI**

**UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
PROGRAM DOKTOR TEKNIK SIPIL**

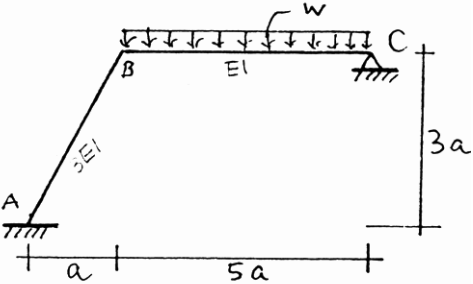
Jalan Ciumbuleuit 94 - Bandung 40141

Waktu Ujian : 2 Februari 2006 - 9 Februari 2006

Dosen : Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D.

SIFAT UJIAN: BUKU TERBUKA, TIDAK BOLEH DIDISKUSIKAN DENGAN SIAPAPUN

**SOAL 1**



Diketahui struktur 2 dimensi yang terbuat dari material dengan modulus elastisitas  $E$ . Momen inersia komponen struktur  $AB$  adalah 3 kali momen inersia komponen struktur  $BC$ . Abaikan deformasi geser dan aksial pada struktur dan berat sendiri struktur. Pada komponen struktur  $BC$  terdapat beban terbagi rata  $w$ . Carilah semua reaksi tumpuan, deformasi, struktur, dan gaya-gaya dalam dengan menggunakan:

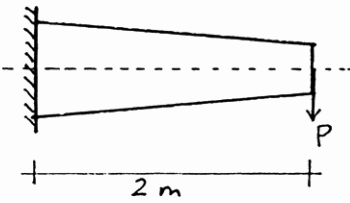
- metode kekakuan
- metode fleksibilitas

**SOAL 2**



Diketahui sebuah kolom berpenampang lingkaran dengan panjang  $L$  yang dibebani gaya aksial tekan  $P$ . Tumpuan bawah kolom tersebut adalah jepit dan ujung atasnya bebas. Diameter kolom bervariasi secara linear dari ujung atas (sebesar  $D$ ) ke ujung bawah (sebesar  $2D$ ). Carilah beban kritis (tekuk)  $P_{kritis}$  pada kolom tersebut (sebutkan semua asumsi yang digunakan).

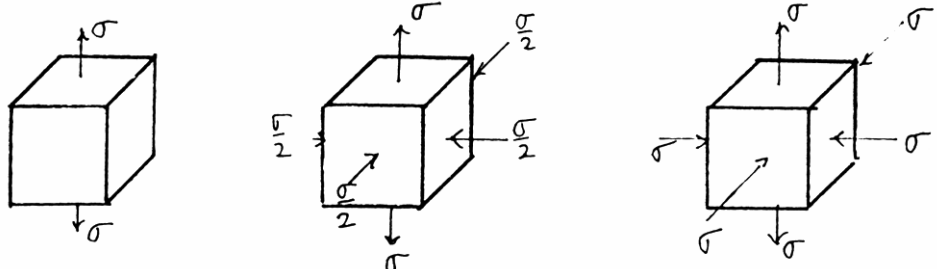
**SOAL 3**



Diketahui sebuah balok dengan penampang persegi panjang yang tidak prismatis. Penampangnya berukuran  $100 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$  di ujung kiri, dan  $100 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$  di ujung kanan (tinggi penampang bervariasi secara linier). Di ujung kiri balok terdapat tumpuan jepit dan di ujung kanan terdapat beban terpusat  $P = 10 \text{ kN}$  seperti terlihat dalam gambar. Modulus elastisitas material yang digunakan adalah  $200000 \text{ MPa}$  dan rasio Poisson adalah  $0.3$ . Panjang balok adalah  $2 \text{ m}$ . Carilah defleksi vertikal di lokasi beban terpusat dengan cara :

- balok dibagi menjadi segmen-segmen horizontal dan menganggap bahwa setiap segmen mempunyai tinggi penampang konstan; deformasi geser dapat diabaikan.
  - Balok dianalisis dengan menggunakan elemen bidang; perangkat lunak yang tersedia dapat digunakan untuk melakukan analisis ini.
- Bandingkan hasil (a) dan (b) dan beri komentar.

**SOAL 4**

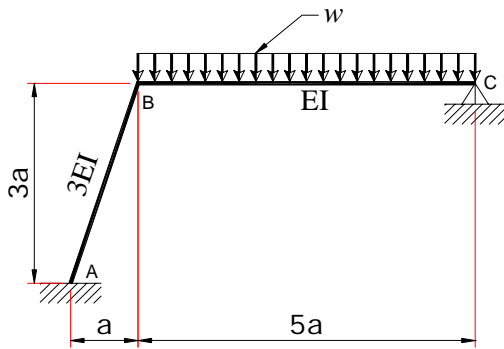


Untuk kondisi tegangan pada elemen diferensial seperti terlihat dalam gambar (a), (b), dan (c), carilah tegangan  $\sigma$  yang menyebabkan leleh terjadi, apabila digunakan:

- kriteria leleh Von Mises,
- kriteria leleh tresca

- Selesai -

**Soal 1.**



Diketahui struktur 2 dimensi yang terbuat dari material dengan modulus elastisitas E. Momen inersia komponen struktur AB adalah 3 kali momen inersia komponen struktur BC. **Abaikan deformasi geser** , **deformasi aksial** dan **berat sendiri struktur**. Bila pada komponen struktur BC terdapat beban terbagi merata  $w$ . Carilah semua reaksi tumpuan, deformasi struktur, dan gaya-gaya dalam menggunakan :

- a. Metode kekakuan
- b. Metode fleksibilitas

**Jawaban**

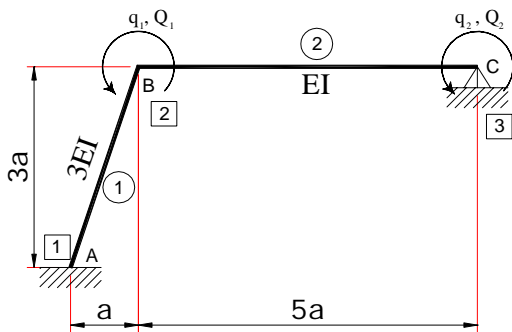
**a. (Metode kekakuan)**

Meskipun terlihat sebagai struktur portal tetapi karena nodal A jepit , nodal C sendi dan deformasi aksial dianggap tidak ada (diabaikan) maka nodal B tidak bisa mengalami translasi, sehingga kondisinya sama seperti nodal C yaitu hanya dapat mengalami rotasi. Jadi *degree of freedom* (d.o.f) dari sistem di atas ada 2 (dua) berupa rotasi di B dan C.

Oleh karena itu penyelesaian soal diatas apabila digunakan metode matrik dapat menggunakan formulasi yang sama seperti pada penyelesaian balok menerus.

Referensi : Siegfried M. Holzer. (1985). “Computer Analysis of Structures: Matrix Structural Analysis Structured Programming”, Elsevier, New York

1. Deformasi nodal bebas (d.o.f) yang akan dicari



Deformasi yang dicari adalah rotasi

$$q_k, \quad k=1,2$$

2. Model elemen dapat diekspresikan sebagai  $f_i = kd_i$  ,  $i = 1,2$  , dimana

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

3. Sistem model. Model elemen dirakit ke dalam model sistem dengan menerapkan kondisi kompatibilitas dan keseimbangan. Kondisi kompatibilitas dan keseimbangan tersebut dapat diekspresikan sebagai matrik kode batang (Holzer 1985), sebagai berikut.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matrik kode batang [M] tersebut di atas berkaitan dengan relasi perpindahan berikut

$$D_1 = d_1 = \begin{matrix} \begin{matrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}, \text{ dan } D_2 = d_2 = \begin{matrix} \begin{matrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Dan berkaitan juga dengan transformasi gaya nodal

$$F_1 = f_1 = \begin{matrix} \begin{matrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix} \xrightarrow{M} F_{(1)} = \begin{matrix} \begin{matrix} f_4^1 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$F_2 = f_2 = \begin{matrix} \begin{matrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \xrightarrow{M} F_{(2)} = \begin{matrix} \begin{matrix} f_2^2 \\ f_4^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Generalisasi vektor gaya  $F_{(i)}$  dapat diekspresikan dalam rumusan perpindahan nodal pada batang AB adalah sebagai berikut

$$\begin{matrix} \begin{matrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix} = \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4L^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Sedangkan untuk batang BC adalah

$$\begin{matrix} \begin{matrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} = \frac{EI_{BC}}{L_{BC}} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4L^2 & \cdot & 2L^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2L^2 & \cdot & 4L^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Dari persamaan di atas terlihat hubungan antara vektor beban (lendutan) dan matrik kekakuan yang terkait saja (sesuai dengan dof). Uraikan di bawah menjelaskan penyusunan matrik kekakuan khusus untuk komponen yang terkait dengan dof yang tentu saja memanfaatkan matrik kode batang [M].





Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

Pada batang #2 (batang BC)

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{M} D_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{wa^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.71107 \\ 0 \\ 2.95966 \end{Bmatrix} \quad \text{utk batang horizontal } D_2 = d_2$$

$$f_2 = kd_2 = \frac{EI}{125a^3} \begin{bmatrix} 12 & 30a & -12 & 30a \\ 30a & 100a^2 & -30a & 50a^2 \\ -12 & -30a & 12 & -30a \\ 30a & 50a^2 & -30a & 100a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{wa^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.71107 \\ 0 \\ 2.95966 \end{Bmatrix} = wa \begin{Bmatrix} 0.53966 \\ 0.61501a \\ -0.53966 \\ 2.08330a \end{Bmatrix}$$

Vektor gaya pada elemen yang sesungguhnya adalah

$$\bar{f}_2 = f_2 + \hat{f}_2 = wa \left( \begin{Bmatrix} 0.53966 \\ 0.61501a \\ -0.53966 \\ 2.08330a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2.5 \\ 2.08333a \\ 2.5 \\ -2.08333a \end{Bmatrix} \right) = wa \begin{Bmatrix} 3.03966 \\ 2.69834a \\ 1.96034 \\ \approx 0 \end{Bmatrix}$$

Pada batang #1 (batang AB)

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{M} D_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \end{Bmatrix} = \frac{wa^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.71107 \end{Bmatrix}$$

$$f_1 = kd_1 = \frac{3EI}{10^{1.5}a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\sqrt{10}a & -12 & 6\sqrt{10}a \\ 6\sqrt{10}a & 40a^2 & -6\sqrt{10}a & 20a^2 \\ -12 & -6\sqrt{10}a & 12 & -6\sqrt{10}a \\ 6\sqrt{10}a & 20a^2 & -6\sqrt{10}a & 40a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{wa^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.71107 \end{Bmatrix} = wa \begin{Bmatrix} -1.27993 \\ -1.34916a \\ +1.27993 \\ -2.69832a \end{Bmatrix}$$

$$\bar{f}_1 = f_1 + \hat{f}_1 = wa \left( \begin{Bmatrix} -1.27993 \\ -1.34916a \\ +1.27993 \\ -2.69832a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = wa \begin{Bmatrix} -1.27993 \\ -1.34916a \\ +1.27993 \\ -2.69832a \end{Bmatrix}$$

**b. (Metode fleksibilitas)**

Referensi yang digunakan dalam penyelesaian ini adalah

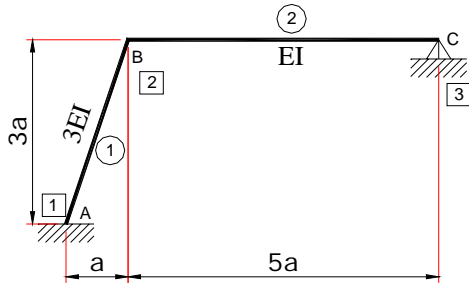
- Ghali, A. dan Neville, A.M. (1997). “Structural Analysis : a Unified Classical and Matrix Approach 4<sup>th</sup> Ed. ”, E&FN Spon, London
- Richard N. White, Peter Gergely dan Robert G. Sexsmith. (1976). “Structural Engineering : Combined Edition”, John Wiley & Sons, New York

Langkah penyelesaian

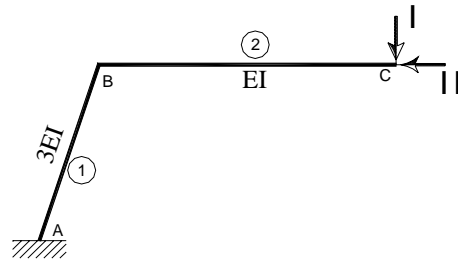
1. Menentukan derajat ketidak-tentuan statis dari struktur yang akan dihitung, untuk soal ini bila deformasi geser dan aksial diabaikan maka derajat ketidak-tentuan-nya adalah dua (2).
2. Selanjutnya menentukan release pada struktur tersebut sehingga menjadi struktur statis tertentu, stabil dan mudah dianalisis. Gaya yang di-release disebut gaya redundan.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

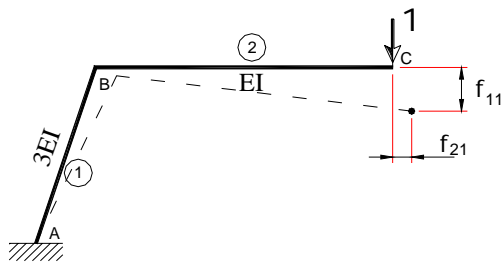
3. Hitung deformasi struktur sejumlah derajat ketidaktentuannya akibat beban luar maupun beban redundan per unit satuan.



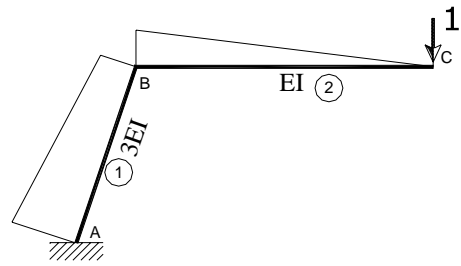
a). struktur sebenarnya



b). d.o.f yang akan dicari



c). gaya redundan 1 unit satuan pada d.o.f ke-1



d). momen akibat gaya redundan 1 unit satuan

**Mencari momen sebagai fungsi jarak akibat beban unit satuan pada d.o.f ke-1**

Batang BC , jarak x dihitung dari titik C menuju titik B

$$L_{BC} = 5a$$

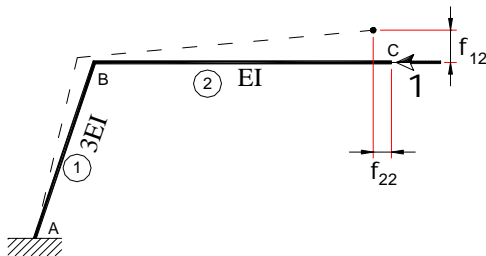
$$M_x = x$$

$$M_B = 5a$$

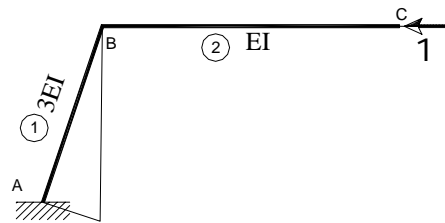
Batang AB , jarak x dihitung dari titik B menuju titik A

$$L_{AB} = a\sqrt{10} , \text{komponen gaya redundan yang tegak lurus batang AB} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$M_x = 5a + \frac{x}{\sqrt{10}}$$



d). gaya redundan 1 unit satuan pada d.o.f ke-2



d). momen akibat gaya redundan 1 unit satuan

**Mencari momen sebagai fungsi jarak akibat beban unit satuan pada d.o.f ke-2**

Batang BC , jarak x dihitung dari titik C menuju titik B

$$L_{BC} = 5a$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

$$M_B = M_x = 0$$

Batang AB , jarak x dihitung dari titik B menuju titik A

$$L_{AB} = a\sqrt{10} , \text{komponen gaya redundan yang tegak lurus batang AB} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$M_x = \frac{3}{\sqrt{10}} x$$

**Kesepakatan tanda**

Vektor positif kearah bawah ( $\Downarrow$ ) dan kiri ( $\Leftarrow$ ) , rotasi berlawanan jarum jam ( $\curvearrowright$ )

**Deformasi searah dof 1 akibat beban satu unit satuan pada redundan 1 yaitu ( $f_{11}$ )**

$$f_{11} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{5a} x^2 dx + \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} \left(5a + \frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2 dx$$

Catatan : Momen sama tanda (-) , karena dikalikan menjadi bertanda (+) positif

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{5a} + \frac{1}{3EI} \left[ 25a^2 x + \frac{5}{\sqrt{10}} ax^2 + \frac{1}{30} x^3 \right]_0^{a\sqrt{10}}$$

$$f_{11} = \frac{41.66667}{EI} a^3 + \frac{1}{3EI} (79.05694a^3 + 15.81139a^3 + 1.05409a^3)$$

$$f_{11} = \frac{41.66667}{EI} a^3 + \frac{95.92242}{3EI} a^3$$

$$f_{11} = \frac{73.64081}{EI} a^3 \text{ (arah } \Downarrow \text{)}$$

**Deformasi searah dof 2 akibat beban satu unit satuan pada redundan 1 yaitu ( $f_{21}$ )**

$$f_{21} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{5a} 0 \cdot x dx + \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} -\frac{3x}{\sqrt{10}} \left(5a + \frac{x}{\sqrt{10}}\right) dx$$

$$f_{21} = -\frac{1}{3EI} \left[ \frac{15}{2\sqrt{10}} ax^2 + \frac{1}{10} x^3 \right]_0^{a\sqrt{10}} = -\frac{1}{3EI} (23.71708a^3 + a^3\sqrt{10})$$

$$f_{21} = -\frac{8.95979}{EI} a^3 \text{ (arah } \Rightarrow \text{)}$$

**Deformasi searah dof 1 akibat beban satu unit satuan pada redundan 2 yaitu ( $f_{12}$ )**

$$f_{12} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{5a} x \cdot 0 dx + \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} -\left(5a + \frac{x}{\sqrt{10}}\right) \frac{3x}{\sqrt{10}} dx$$

$$f_{12} = -\frac{1}{3EI} \left[ \frac{15ax^2}{2\sqrt{10}} + \frac{x^3}{10} \right]_0^{a\sqrt{10}}$$

$$f_{12} = -\frac{1}{3EI} (23.71708a^3 + a^3\sqrt{10})$$

$$f_{12} = -\frac{8.95979}{EI} a^3 \text{ (arah } \Rightarrow \text{)}$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D

**Deformasi searah dof 2 akibat beban satu unit satuan pada redundan 2 yaitu ( $f_{22}$ )**

$$f_{22} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{5a} 0 \cdot 0 dx + \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} \left(\frac{3x}{\sqrt{10}}\right)^2 dx$$

$$f_{22} = \frac{1}{3EI} \left[ \frac{3}{10} x^3 \right]_0^{a\sqrt{10}}$$

$$f_{22} = \frac{1}{3EI} (9.48683a^3)$$

$$f_{22} = \frac{3.16228}{EI} a^3 \quad (\text{arah } \leftarrow)$$

Ke empat langkah di atas dapat diformulasikan dalam bentuk matrik fleksibilitas sbb :

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \frac{a^3}{EI} \begin{bmatrix} 73.64081 & -8.95979 \\ -8.95979 & 3.16228 \end{bmatrix}$$

dan dengan bantuan *scientific* kalkulator CASIO CFX-9850G dapat dicari invers-nya sbb:

$$f^{-1} = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 0.02072 & 0.05872 \\ 0.05872 & 0.48259 \end{bmatrix}$$

**Mencari momen sebagai fungsi jarak akibat Beban Merata  $w$  pada Batang BC**

Batang BC , jarak  $x$  dihitung dari titik C menuju titik B

$$L_{BC} = 5a$$

$$M_x = \frac{1}{2} wx^2$$

$$M_B = 12.5wa^2 \quad V_B = 5wa$$

Batang AB , jarak  $x$  dihitung dari titik B menuju titik A

$$L_{AB} = a\sqrt{10} \text{ , komponen beban } V_B \text{ yang tegak lurus batang AB} = \frac{5wa}{\sqrt{10}}$$

$$M_x = 12.5wa^2 + \frac{5wa \cdot x}{\sqrt{10}}$$

**Deformasi searah dof 1 akibat beban luar merata  $w$  , yaitu ( $D_1$ )**

$$D_1 = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{5a} x \left(\frac{1}{2} wx^2\right) dx + \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} \left(5a + \frac{x}{\sqrt{10}}\right) \left(12.5wa^2 + \frac{5wa \cdot x}{\sqrt{10}}\right) dx$$

Catatan : Momen sama tanda (-) , karena dikalikan menjadi bertanda (+) positif

$$D_1 = \frac{1}{2EI} \int_0^{5a} wx^3 dx + \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} \left(62.5wa^3 + \frac{12.5}{\sqrt{10}} wa^2 x + \frac{25}{\sqrt{10}} wa^2 x + \frac{1}{2} wax^2\right) dx$$

$$D_1 = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{4} wx^4 \right]_0^{5a} + \frac{1}{3EI} \left[ 62.5wa^3 x + \frac{12.5}{2\sqrt{10}} wa^2 x^2 + \frac{25}{2\sqrt{10}} wa^2 x^2 + \frac{1}{6} wax^3 \right]_0^{a\sqrt{10}}$$

$$D_1 = \frac{78.125}{EI} wa^4 + \frac{1}{3EI} (197.64235wa^4 + 19.76424wa^4 + 39.52847wa^4 + 5.27046wa^4)$$

$$D_1 = \frac{78.125}{EI} wa^4 + \frac{262.20552}{3EI} wa^4$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

$$D_1 = \frac{165.52684}{EI} wa^4 \quad (\text{arah } \Downarrow)$$

**Deformasi searah dof 2 akibat beban luar merata  $w$ , yaitu ( $D_2$ )**

$$D_2 = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{5a} 0 \cdot \left(\frac{1}{2} wx^2\right) dx - \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} \frac{3x}{\sqrt{10}} \left(12.5wa^2 + \frac{5wa \cdot x}{\sqrt{10}}\right) dx$$

$$D_2 = 0 - \frac{1}{3EI} \int_0^{a\sqrt{10}} \left(\frac{37.5}{\sqrt{10}} wa^2 x + \frac{15}{10} wax^2\right) dx$$

$$D_2 = -\frac{1}{3EI} \left[ \frac{37.5}{2\sqrt{10}} wa^2 x^2 + \frac{15}{30} wax^3 \right]_0^{a\sqrt{10}}$$

$$D_2 = -\frac{1}{3EI} (59.29271wa^4 + 15.81139wa^4)$$

$$D_2 = -\frac{75.10410}{3EI} wa^4$$

$$D_2 = -\frac{25.03470}{EI} wa^4 \quad (\text{arah } \Rightarrow)$$

Dalam format matriks, maka deformasi pada d.o.f akibat beban luar

$$D_i = \begin{Bmatrix} 165.52684 \\ -25.03470 \end{Bmatrix} \frac{wa^4}{EI}$$

Lendutan akhir merupakan hasil super-posisi dari pengaruh beban luar dan gaya redundan pada d.o.f yang di release, dan dituliskan dalam bentuk persamaan berikut:

$$D_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0$$

$$D_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0$$

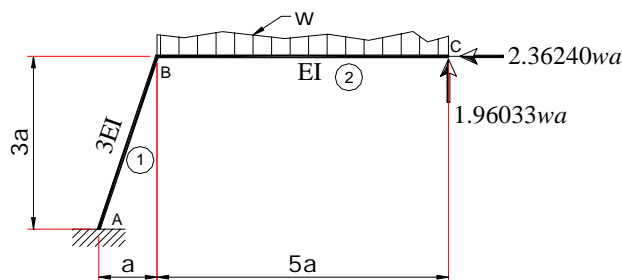
Hubungan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matrik

$$[f]\{F\} = \{-D\} \quad \text{atau} \quad \{F\} = [f]^{-1}\{-D\}$$

Maka dengan terbentuknya matrik fleksibilitas dan vektor deformasi maka gaya-gaya redundan dapat dihitung

$$F_i = f^{-1}D_i = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 0.02072 & 0.05872 \\ 0.05872 & 0.48259 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -165.52684 \\ 25.03470 \end{Bmatrix} \frac{wa^4}{EI} = \begin{Bmatrix} -1.96033 \\ 2.36240 \end{Bmatrix} wa$$

Catatan : invers dilakukan langsung dalam kalkulator untuk menghindari pembulatan yang mengurangi ketelitian. Hasil di atas ternyata sama bila dibandingkan dengan metoda kekakuan.



Free-body diagram struktur ekuivalen

*Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D*

Karena struktur di atas telah menjadi struktur statis tertentu biasa maka gaya-gaya dalam maupun reaksi perletakan dapat dicari berdasarkan persamaan keseimbangan biasa.

**Reaksi Tumpuan A**

$$\sum F_x = 0, H_A + 2.36240wa = 0 \rightarrow H_A = -2.36240wa \text{ (arah } \Rightarrow)$$

$$\sum F_y = 0, V_A + 1.96033wa - 5wa = 0 \rightarrow V_A = 3.03967wa \text{ (arah } \hat{u})$$

$$\sum M_A = 0, M_A - 5wa * 3.5a + 1.96033wa * 6a + 2.36240wa * 3a = 0 \rightarrow M_A = -1.34918wa^2 \text{ (} \Rightarrow)$$

Momen pada Potongan di titik B, tinjau batang BC

$$\sum M_B = 0, M_B - 5wa * 2.5a + 1.96033wa * 5a + 2.36240wa * 0 = 0 \rightarrow M_B = 2.69835wa^2 \text{ (} \hat{u})$$

**Gaya normal**

pada batang AB dicari dengan menguraikan komponen gaya reaksi di titik A

$$N_{AB} = -\frac{3}{\sqrt{10}} * 3.03967wa - \frac{1}{\sqrt{10}} * 2.36240wa = -3.63074wa \text{ (tekan)}$$

batang BC dicari dengan keseimbangan titik B thd gaya horizontal

$$N_{BC} + 2.3624wa = 0 \text{ maka } N_{BC} = -2.3624wa \text{ (arah } \Rightarrow \text{ terhadap batang BC)}$$

**Gaya geser**

batang AB dicari dengan menguraikan komponen gaya reaksi di titik A

$$V_{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}} * 3.03967wa - \frac{3}{\sqrt{10}} * 2.36240wa = -1.279994wa \text{ (arah } \Downarrow \text{ terhadap batang AB)}$$

batang BC dicari dengan keseimbangan titik B thd gaya vertikal

$$V_{BC} - 5wa + 1.96033wa = 0 \text{ maka } V_{BC} = 3.03967wa \text{ (arah } \hat{u} \text{ terhadap batang BC)}$$

**Momen Lapangan Maks.**

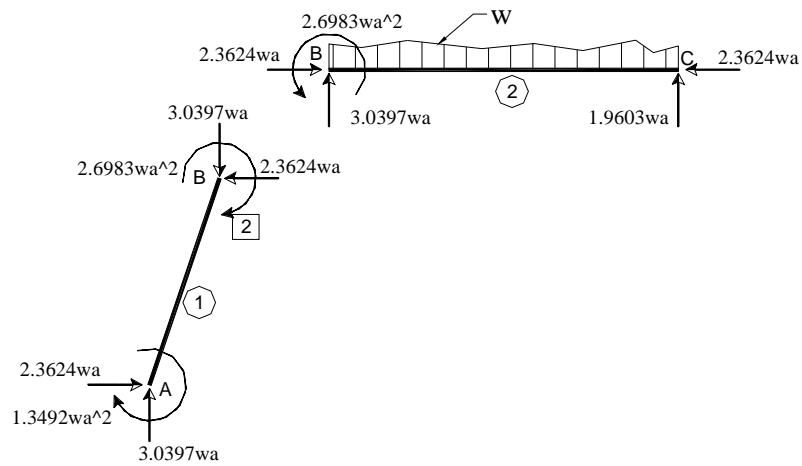
Mencari momen lapangan maksimum pada bentang BC (terjadi pada  $V_{BC} = 0$ )

dihitung dari titik C (dari sebelah kanan)

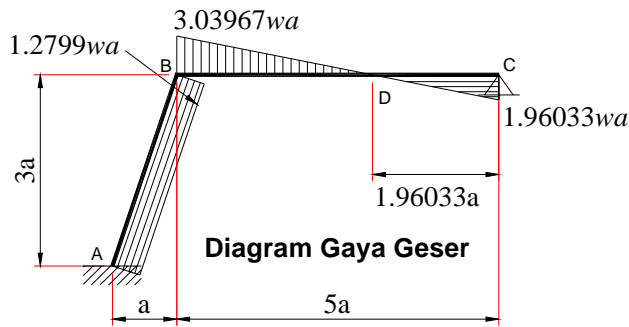
$$wx - 1.96033wa = 0 \rightarrow x = 1.96033a \text{ (lokasi momen maksimum)}$$

$$M_{lap} = 1.96033wa * 1.96033a - 0.5w * (1.96033a)^2 = 1.92145wa^2$$

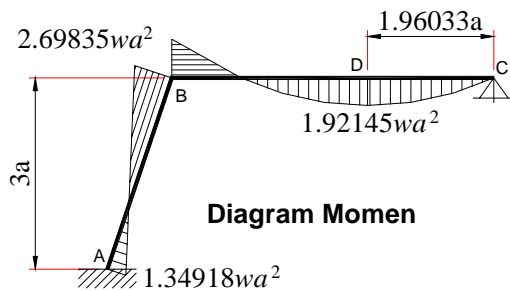
Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D



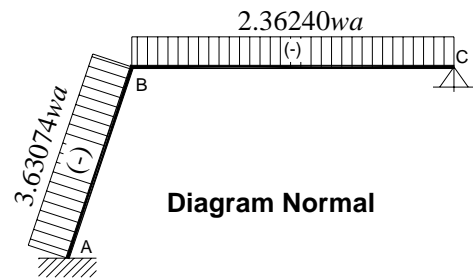
**Diagram Benda Bebas**



**Diagram Gaya Geser**



**Diagram Momen**



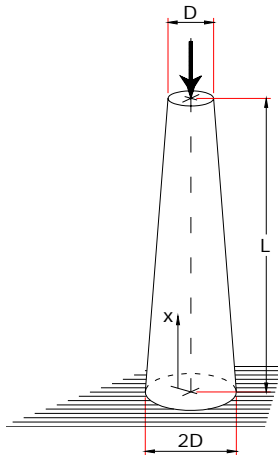
**Diagram Normal**

**Diagram Hasil Analisis**



Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D

**Soal 2.**



Diketahui sebuah kolom berpenampang lingkaran dengan panjang L yang dibebani gaya aksial tekan P.

Tumpuan bawah kolom tersebut adalah jepit dan ujung atasnya bebas. Diameter kolom bervariasi secara linier dari ujung atas ( $\varnothing D$ ) ke ujung bawah ( $\varnothing 2D$ ).

Carilah beban kritis (tekuk)  $P_{kritis}$  pada kolom tersebut. Sebutkan semua asumsi yang digunakan.

**Jawaban**

**Asumsi dan batasan yang diambil untuk penyelesaian ini.**

1. Elemen struktur dianggap benar-benar lurus dan beban P diberikan pada titik berat penampang sehingga tidak ada eksentrisitas.
2. Material elastis linier sesuai hukum Hooke, diwakili oleh nilai Modulus Elastisitas (E).
3. Deformasi struktur relatif kecil (*small displacement*)
4. Deformasi aksial elemen tekan diabaikan.

**Inersia batang sebagai fungsi jarak**

Penampang bulat non-prismatis sebagai fungsi dari jarak atau  $x$  (dimulai dari dasar) , momen inersia disusun sebagai fungsi dari jarak sebagai berikut

$$I_x = \frac{1}{64} \pi D^4 \left(2 - \frac{x}{L}\right)^4$$

dengan bantuan Mathcad maka rumusan tersebut dapat diuraikan menjadi

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64 L^4} (16L^4 - 32L^3 x + 24L^2 x^2 - 8Lx^3 + x^4)$$

Chek formulasi tersebut

$$x=0 \quad \rightarrow \quad I_x = \frac{\pi D^4}{64 L^4} (16L^4 + 0 + 0 + 0 + 0) = \frac{16}{64} \pi D^4 \quad \rightarrow \text{ok}$$

$$x=L \quad \rightarrow \quad I_x = \frac{\pi D^4}{64 L^4} (16L^4 - 32L^3 L + 24L^2 L^2 - 8LL^3 + L^4) = \frac{\pi D^4}{64} \quad \rightarrow \text{ok.}$$

**Metode Rayleigh-Ritz**

Selanjutnya untuk penyelesaian kasus stabilitas ini akan digunakan metoda Rayleigh-Ritz yang memakai prinsip potensi energi stationer melalui cara pendekatan. Ketelitian cara pendekatan ini tergantung dari fungsi bentuk kurva lendutan yang digunakan. Penggunaan prinsip energi stationer relatif sederhana karena hanya memakai prinsip keseimbangan dan *diferensial calculus* biasa.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

Referensi : Alexander Chajes .(1974). “Principles of Structural Stability Theory”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Berdasarkan konsep keseimbangan netral, beban kritis adalah beban yang menyebabkan sistem pada kondisi batas melengkung yang masih dalam kondisi seimbang. Selebihnya sedikit struktur tersebut sudah *collapsed*, meskipun kondisi material masih elastis.

Fungsi kurva lendutan batang struktur tersebut dianggap mengikuti polinomial

$$y = a + bx + cx^2$$

Dua konstanta (a dan b) pada ekspresi tersebut perlu dievaluasi agar mengikuti kondisi batas pada tumpuan struktur. Kondisi  $y = 0$  untuk  $x = 0$  hanya akan terpenuhi jika  $a = 0$  dan dari persyaratan  $y' = 0$  untuk  $x = 0$  maka nilai  $b = 0$ .

Jadi fungsi lendutan yang memenuhi kondisi batas adalah

$$y = cx^2 \dots\dots\dots (2.1)$$

Hubungan fungsi tersebut memenuhi kondisi batas geometri yaitu  $\delta = \theta = 0$  pada tumpuan jepit tetapi belum memenuhi kondisi natural yaitu  $M = 0$  pada ujung bebas.

Energi regangan yang tersimpan akibat lentur adalah

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (y'')^2 dx$$

$$U = \frac{E}{2} \frac{\pi D^4}{64 L^4} \int_0^L 4C^2 (16L^4 - 32L^3x + 24L^2x^2 - 8Lx^3 + x^4) dx$$

$$U = 2EC^2 \frac{\pi D^4}{64 L^4} \int_0^L (16L^4 - 32L^3x + 24L^2x^2 - 8Lx^3 + x^4) dx$$

$$U = EC^2 \frac{\pi D^4}{32 L^4} \left| 16L^4x - 16L^3x^2 + 8L^2x^3 - 2Lx^4 + \frac{1}{5}x^5 \right|_0^L$$

$$U = EC^2 \frac{\pi D^4}{32 L^4} \frac{31}{5} L^5 = 0.19375 EC^2 \pi D^4 L \dots\dots\dots (2.2)$$

Potensi energi beban adalah produk negatif dari beban dan jarak yang dihasilkan oleh adanya lendutan dari struktur sebagai berikut

$$V = -\frac{P}{2} \int_0^L (y')^2 dx = -\frac{P}{2} \int_0^L 4C^2 x^2 dx = -\frac{2}{3} PC^2 L^3 \dots\dots\dots (2.3)$$

Energi regangan lentur digabung dengan potensi energi beban luar

$$U + V = 0.19375 \pi EC^2 D^4 L - \frac{2}{3} PC^2 L^3 \dots\dots\dots (2.4)$$

Bentuk struktur yang melendut tetap dalam konfigurasi keseimbangan bila  $U + V$  mempunyai nilai stasioner. Untuk menemukan lendutan  $y(x)$  yang berkaitan dengan nilai stasioner dari  $U + V$  maka diperlukan penggunaan *calculus variasional*. Itu merupakan konsekuensi pemilihan kurva peralihan yang digunakan dalam penyelesaian soal ini.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

Total energi potensi di atas menjadi fungsi dari parameter tunggal C, *calculus diferensial* mencukupi untuk menemukan nilai C pada kondisi ekstrim U + V sehingga menghasilkan ekspresi berikut:

$$\delta(U + V) = 0$$

dapat diganti dengan  $\frac{d(U + V)}{dC} \delta C = 0$

atau cukup dengan

$$\frac{d(U + V)}{dC} = 0$$

karena  $\delta C$  adalah perpindahan virtuil dan nilainya sembarang.

Selanjutnya persamaan (2.4) di diferensialkan terhadap C dan menghasilkan

$$0.3875\pi ECD^4L - 1.3333PCL^3 = 0$$

Susunan di ubah menjadi

$$C \left( P - 0.29063 \frac{\pi ED^4}{L^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (2.5)$$

Persamaan (2.5) memberikan penyelesaian trivial keseimbangan untuk setiap kondisi beban, dengan anggapan bahwa kolom tetap lurus dengan beban kritis.

$$P_{kritis} = 0.29063 \frac{\pi ED^4}{L^2}$$

Untuk mengetahui apakah penyelesaian di atas sudah benar, maka nilai  $P_{kritis}$  akan dibandingkan dengan nilai  $P_{kritis}$  kolom kantilever yang penampang batangnya prismatis, masing-masing dengan penampang diameter D ( $P_{kritis}$  paling kecil atau batas bawah) dan diameter 2D ( $P_{kritis}$  paling besar atau batas atas). Hasil penyelesaian di atas harus berada di antara kedua nilai tersebut.

Kolom jepit-bebas dengan penampang prismatis

diperoleh dari rumus Euler  $P_{kritis} = \frac{\pi^2 EI_x}{4L^2}$

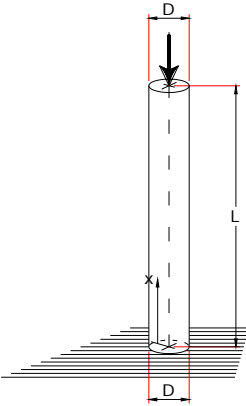
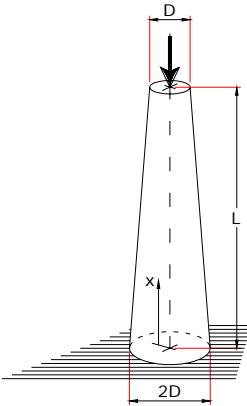
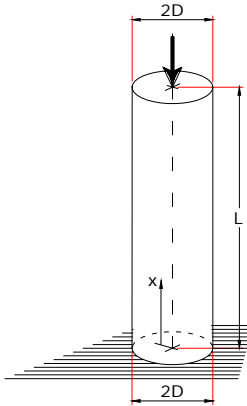
$\phi = D$  maka  $I_x = \frac{1}{64} \pi D^4$

$$\rightarrow P_{kritis} = \frac{\pi^2 E \pi D^4}{256L^2} = 0.0385 \frac{\pi ED^4}{L^2}$$

$\phi = 2D$  maka  $I_x = \frac{1}{4} \pi D^4$

$$\rightarrow P_{kritis} = \frac{\pi^2 E \pi D^4}{16L^2} = 0.6168 \frac{\pi ED^4}{L^2}$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D

Prismatis $\phi = D$	Non-prismatis $\phi = D \sim 2D$	Prismatis $\phi = 2D$
		
$P_{kritis} = 0.0385 \frac{\pi ED^4}{L^2}$	$P_{kritis} = 0.29063 \frac{\pi ED^4}{L^2}$	$P_{kritis} = 0.6168 \frac{\pi ED^4}{L^2}$
1x	7.6 x	16 x

∴ hasil yang diperoleh masih dalam batas-batas toleransi dan diperkirakan benar.

**Catatan:**

S.P. Timoshenko dan J.M Gere ternyata telah menyajikan rumus pendekatan tekuk kantilever non-prismatis di buku klasiknya “Theory of Elastic Stability” pada halaman 125 - 132.

Untuk itu, rumus tersebut akan diuji-cobakan sebagai berikut :

Momen inersia pada bagian atas  $I_1 = \frac{1}{64} \pi D^4$

Momen inersia pada bagian bawah  $I_2 = \frac{1}{4} \pi D^4$

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{16} = 0.0625$  dari Tabel 2.12 halaman 128 untuk  $n = 4$  (solid conical bar)

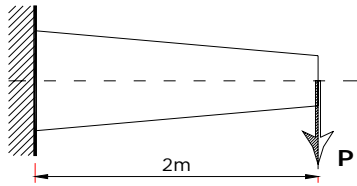
diperoleh  $m = 1.202$

Maka  $P_{kritis} = \frac{mEI_2}{L^2} = \frac{1.202E}{L^2} \frac{1}{4} \pi D^4 = 0.3 \frac{\pi ED^4}{L^2}$

∴ Hasilnya mendekati hitungan yang telah dikerjakan di atas.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

**Soal 3.**



Ket. : gambar tdk berskala

Diketahui sebuah balok dengan penampang persegi panjang yang tidak prismatis. Penampangnya berukuran 100 mm x 400 mm di ujung kiri, dan 100 mm x 200 mm di ujung kanan (tinggi penampang bervariasi secara linier). Di ujung kiri balok terdapat tumpuan jepit dan di ujung kanan terdapat beban terpusat  $P = 10 \text{ kN}$  seperti terlihat pada gambar. Modulus elastisitas material yang digunakan adalah 200000 MPa dan rasio Poisson adalah 0.3. Panjang balok 2 m. Carilah defleksi vertikal di lokasi beban terpusat dengan cara:

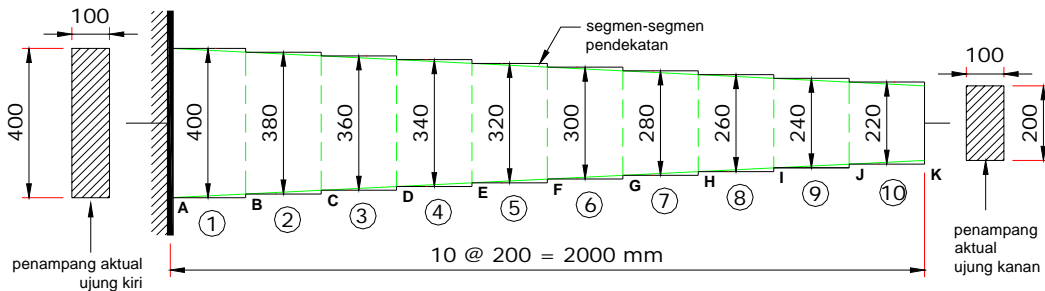
- a) Balok dibagi menjadi segmen-segmen horizontal dan menganggap bahwa setiap segmen mempunyai tinggi penampang konstan; deformasi geser dapat diabaikan.
- b) Balok dianalisis dengan elemen bidang; perangkat lunak yang tersedia dapat digunakan untuk melakukan analisis ini.

Bandingkan hasil (a) dan (b) dan beri komentar.

**Jawaban**

**A1. (balok dibagi menjadi segmen-segmen dengan tinggi konstan)**

Agar mendapat ketelitian yang mencukupi maka balok dibagi menjadi 10 segmen, tinggi tiap segmen disesuaikan dengan kemiringan balok yang sebenarnya seperti terlihat pada gambar (skala proporsional). Untuk setiap segmen tingginya konstan, yang ukurannya juga diperlihatkan pada gambar.

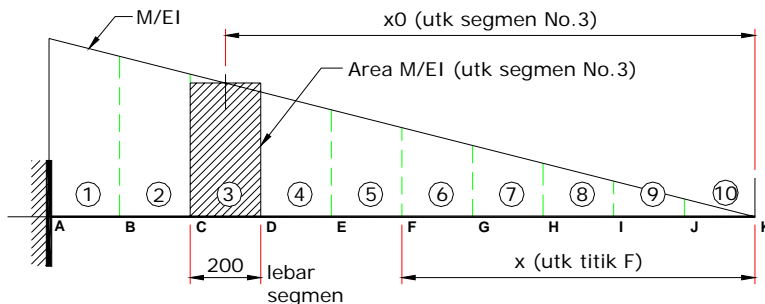


**Gambar 1. Model Balok Kantilever Tipe a1 (skala proporsional)**

Karena deformasi geser dapat diabaikan sehingga balok kantilever tersebut hanya ditinjau terhadap lentur maka defleksi vertikal di ujung kanan dapat dicari dengan metoda Momen Area.

Asumsi tambahan dalam penyelesaian ini adalah berat sendiri balok diabaikan.

Referensi : Timonshenko, S. (1955). “Strength of Materials : Part I Elementary Theory and Problems 3<sup>rd</sup> Ed.”, Van Nostrand Reinhold Company, New York.



**Gambar 2. Pendekatan Menghitung Lendutan Titik K dengan Metode Momen Area**

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D

Setiap segmen dengan luasan Area M/EI dikalikan x0 akan menyumbang komponen lendutan di titik F. Lendutan total di titik F tentu saja adalah akibat segmen-segmen itu secara keseluruhan.

Selanjutnya langkah hitungan dituangkan dalam bentuk tabel sebagai berikut :

titik	x	h (mm)	b (mm)	Ix (mm <sup>4</sup> )	M (Nmm)	M/EI	No segmen	Area M/EI	x0	lendutan segmen
A	2000	400	100	5.333E+08	2.00E+07	1.88E-07				
B	1800	400	100	5.333E+08	1.80E+07	1.69E-07	1	3.56E-05	1900	0.06769
C	1600	380	100	4.573E+08	1.60E+07	1.75E-07	2	3.44E-05	1700	0.05843
D	1400	360	100	3.888E+08	1.40E+07	1.80E-07	3	3.55E-05	1500	0.05325
E	1200	340	100	3.275E+08	1.20E+07	1.83E-07	4	3.63E-05	1300	0.04722
F	1000	320	100	2.731E+08	1.00E+07	1.83E-07	5	3.66E-05	1100	0.04029
G	800	300	100	2.250E+08	8.00E+06	1.78E-07	6	3.61E-05	900	0.03248
H	600	280	100	1.829E+08	6.00E+06	1.64E-07	7	3.42E-05	700	0.02392
I	400	260	100	1.465E+08	4.00E+06	1.37E-07	8	3.01E-05	500	0.01503
J	200	240	100	1.152E+08	2.00E+06	8.68E-08	9	2.23E-05	300	0.00670
K	0	220	100	8.873E+07	0.00E+00	0.00E+00	10	8.68E-06	100	0.00087
										<b>0.34588</b>

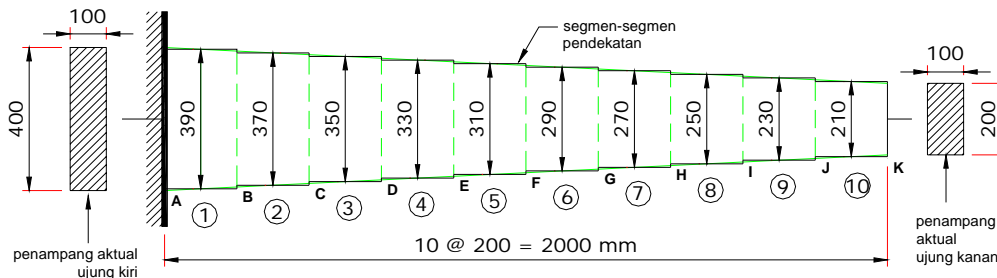
Jadi lendutan vertikal di titik K adalah jumlah kumulatif lendutan tiap segmen = **0.34588 mm**. (dianggap bernilai **100%** , dipakai sebagai pembanding relatif dengan metoda perhitungan lain)

**Keterangan (Lihat Gambar 2):**

- titik lokasi yang diberikan pada Gambar 1
- x jarak titik A terhadap titik K , ujung kanan balok kantilever (lihat Gambar 1)
- h tinggi segmen balok pada titik yang ditinjau
- b lebar segmen balok pada titik yang ditinjau
- Ix momen inersia potongan persegi pada titik yang ditinjau
- M momen pada titik yang ditinjau akibat beban terpusat P = 10 kN dititik K.
- M/EI komponen didalam rumusan metode Momen Area
- segmen notasi dari segmen (lihat Gambar 1)
- Area M/EI luasan M/EI dari tiap segmen yang ditinjau
- x0 jarak titik berat Area M/EI terhadap titik K (yang dicari lendutannya)
- lendutan segmen adalah statis momen Area M/EI terhadap titik K

**A2. (balok dibagi menjadi segmen-segmen dengan tinggi konstan)**

Untuk melihat pengaruh dimensi maka dilakukan cara yang sama dengan sebelumnya hanya saja tinggi segmen diambil nilai rata-rata dari kedua ujungnya yang berbeda, sebagai berikut :



**Gambar 3. Model Balok Kantilever Tipe a2 (skala proporsional)**

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

Selanjutnya langkah hitungan dituangkan dalam bentuk tabel sebagai berikut :

titik	x	h (mm)	b (mm)	lx (mm <sup>4</sup> )	M (Nmm)	M/EI	No segmen	Area M/EI	x0	lendutan segmen
A	2000	390	100	4.943E+08	2.00E+07	2.02E-07				
B	1800	390	100	4.943E+08	1.80E+07	1.82E-07	1	3.84E-05	1900	0.07303
C	1600	370	100	4.221E+08	1.60E+07	1.90E-07	2	3.72E-05	1700	0.06317
D	1400	350	100	3.573E+08	1.40E+07	1.96E-07	3	3.85E-05	1500	0.05782
E	1200	330	100	2.995E+08	1.20E+07	2.00E-07	4	3.96E-05	1300	0.05151
F	1000	310	100	2.483E+08	1.00E+07	2.01E-07	5	4.02E-05	1100	0.04419
G	800	290	100	2.032E+08	8.00E+06	1.97E-07	6	3.98E-05	900	0.03584
H	600	270	100	1.640E+08	6.00E+06	1.83E-07	7	3.80E-05	700	0.02658
I	400	250	100	1.302E+08	4.00E+06	1.54E-07	8	3.36E-05	500	0.01682
J	200	230	100	1.014E+08	2.00E+06	9.86E-08	9	2.52E-05	300	0.00757
K	0	210	100	7.718E+07	0.00E+00	0.00E+00	10	9.86E-06	100	0.00099
										<b>0.37752</b>

Jadi dengan merubah parameter dimensi segmen maka lendutan vertikal di titik K juga mengalami perubahan menjadi = **0.37752 mm**. (bernilai 109% dari model pertama)

**A3. Memperhitungkan pengaruh geser terhadap lendutan**

Pada langkah-langkah sebelumnya lendutan yang dihitung adalah akibat momen. Cara tersebut dapat dikembangkan dengan memperhitungkan deformasi geser, yaitu dengan rumusan:

$$\int_0^L \frac{V_{uj} V}{Ga_r} = a_v \bar{V}_{uj} \dots\dots\dots (Ghali dan Neville 1986 , hal 114)$$

dimana

- $a_v$  adalah luas bidang  $\frac{V}{Ga_r}$
- $\bar{V}_{uj}$  adalah besarnya  $V_{uj}$  akibat beban satu unit satuan yang ditempat pada nodal yang akan dicari lendutannya dan diukur pada titik berat masing-masing luas  $a_v$  di atas. Karena struktur kantilever maka nilainya adalah 1 (satu).
- $G = \frac{E}{1(1+\nu)} = \frac{200000}{1(1+0.3)} = 153846 \text{ MPa}$
- $a_r = \frac{A}{k_y}$  dimana  $k_y = 1.2 \dots\dots\dots (Cook et al. 2002)$

Referensi :

a) Ghali, A. dan Neville, A.M.,(Alih Bahasa : Wira) .(1986). “Analisa Struktur: Gabungan Metode Klasik dan Matriks”, Edisi Ke-2, Penerbit Erlangga, Jakarta

b) Cook, R.D., Malkus, D.E., Plesha, M.E. dan Witt, R.J. (2002). “Concept and Applications of Finite Element Analysis 4<sup>th</sup> Ed.”, John Wiley & Sons

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

Dengan memanfaatkan tabulasi sebelumnya maka lendutan akibat deformasi geser dapat dihitung sebagai berikut :

titik	x	h (mm)	b (mm)	ar (mm <sup>2</sup> )	V (N)	V/(G.ar)	No segmen	Area V/(G.ar)	$\bar{V}_{uj}$	lendutan segmen
A	2000	390	100	3.250E+04	1.00E+04	2.00E-06				
B	1800	390	100	3.250E+04	1.00E+04	2.00E-06	1	4.00E-04	1	0.00040
C	1600	370	100	3.083E+04	1.00E+04	2.11E-06	2	4.22E-04	1	0.00042
D	1400	350	100	2.917E+04	1.00E+04	2.23E-06	3	4.46E-04	1	0.00045
E	1200	330	100	2.750E+04	1.00E+04	2.36E-06	4	4.73E-04	1	0.00047
F	1000	310	100	2.583E+04	1.00E+04	2.52E-06	5	5.03E-04	1	0.00050
G	800	290	100	2.417E+04	1.00E+04	2.69E-06	6	5.38E-04	1	0.00054
H	600	270	100	2.250E+04	1.00E+04	2.89E-06	7	5.78E-04	1	0.00058
I	400	250	100	2.083E+04	1.00E+04	3.12E-06	8	6.24E-04	1	0.00062
J	200	230	100	1.917E+04	1.00E+04	3.39E-06	9	6.78E-04	1	0.00068
K	0	210	100	1.750E+04	1.00E+04	3.71E-06	10	7.43E-04	1	0.00074
										0.00540

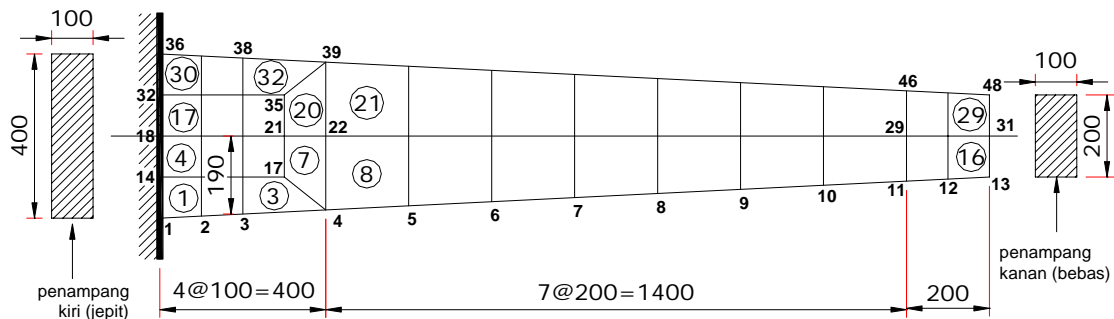
Jadi lendutan kantilever non-primastis adalah jumlah lendutan akibat pengaruh lentur ditambah dengan lendutan akibat pengaruh geser sbb:

$$\Delta = \delta_{lentur} + \delta_{geser}$$

$$= 0.37752 + 0.0054 = 0.38292 \text{ mm}$$

**B1. (balok dianalisis menggunakan elemen bidang)**

Penyelesaian selanjutnya dengan MEH (program SAP2000) untuk dibandingkan hasilnya.



**Gambar 4. Pemodelan dengan 29 Quadrilateral Plane Elemen**

Program m.e.h yang digunakan adalah SAP2000 Student Version 7.4 untuk kapasitas penyelesaian ≤ 100 nodal. Adapun mesh dari model balok kantilever hanya memerlukan 48 nodal, dengan ukuran 100 x 100 mm didaerah tumpuan dan beban terpusat (ujung balok), sedangkan yang lain berukuran 200 x 200 mm.

Agar penomoran nodal dan elemen dapat ditentukan oleh user maka cara pemasukan data yang digunakan adalah dengan INPUT FILE FORMAT<sup>1</sup>. Sepintas lalu memang tidak praktis dibandingkan dengan cara grafis, tetapi berdasarkan kebiasaan penulis umumnya hasilnya lebih bebas dari kesalahan karena kadang-kadang pada cara grafis, program memberi data secara otomatis tanpa kita sadari, dan itu merupakan sumber penyebab kesalahan.

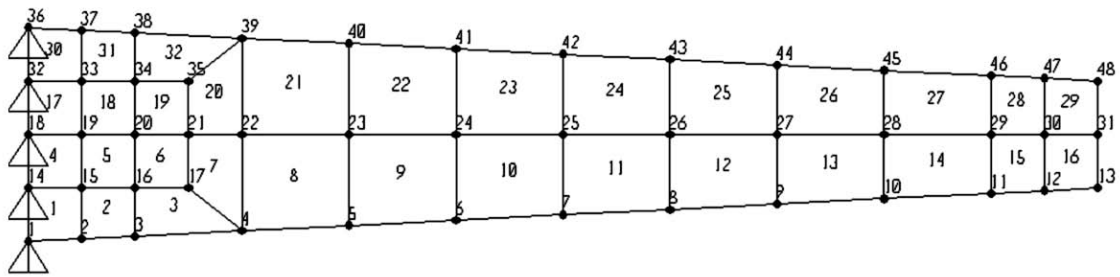
<sup>1</sup> E.L.Wilson, SAP2000® *Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures : INPUT FILE FORMAT*, Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA, Version 7.40 May 2000



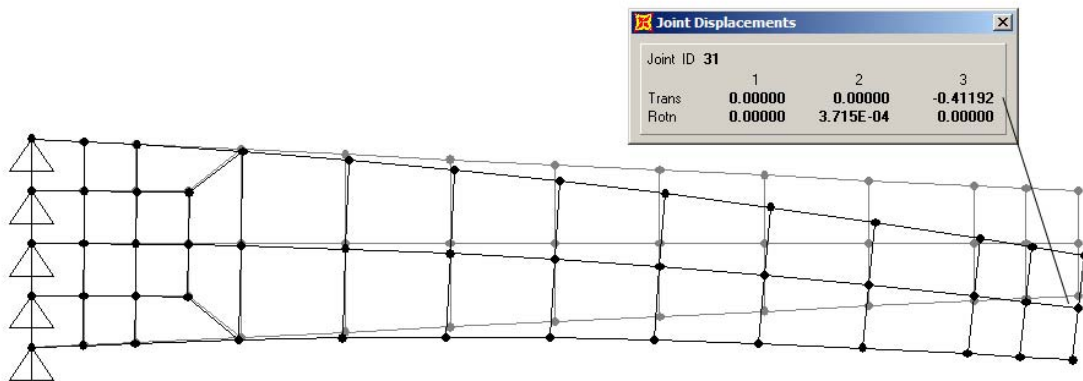
*Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D*

Baris	Input Data Model 1.S2K yang Disiapkan Secara Manual
1	Balok kantilever non-prismatis (Soal No.3 Ujian Kualifikasi Doktor Unpar)
2	
3	SYSTEM
4	DOF=UX,UZ,RY LENGTH=mm FORCE=N PAGE=SECTIONS
5	
6	JOINT
7	1 x= 0.00 y=0 z=-200.00
8	3 x= 200.00 z=-190.00
9	LGEN=1,3,1
10	11 x=1800.00 z=-110.00
11	LGEN=3,11,1
12	13 x=2000.00 z=-100.00
13	LGEN=11,13,1
14	14 x= 0.00
15	17 x= 300.00
16	LGEN=14,17,1
17	18 x= 0.00 z=0.0
18	22 x= 400.00
19	29 x=1800.00
20	LGEN=18,22,1
21	LGEN=22,29,1
22	31 x=2000.00
23	LGEN=29,31,1
24	32 x= 0.00 z= 100.00
25	35 x= 300.00
26	LGEN=32,35,1
27	36 x= 0.00 z= 200.00
28	38 x= 200.00 z= 190.00
29	46 x=1800.00 z= 110.00
30	LGEN=36,38,1
31	LGEN=38,46,1
32	48 x=2000.00 z= 100.00
33	LGEN=46,48,1
34	
35	RESTRAINT
36	ADD=1,36,35 DOF=UX,UZ
37	ADD=14,18,4 DOF=UX,UZ
38	ADD=32 DOF=UX,UZ
39	
40	MATERIAL
41	NAME=BAHAN
42	E=200000 U=0.3
43	
44	SHELL SECTION
45	NAME=PELAT TYPE=MEMBR MAT=BAHAN TH=100
46	
47	SHELL
48	CSYS=0
49	1 J=1,2,14,15 SEC=PELAT
50	GeN=1,2,1
51	3 J=3,4,16,17
52	4 J=14,15,18,19
53	GEN=4,6,1
54	7 J=17,4,21,22
55	8 J=4,5,22,23
56	GEN=8,16,1
57	17 J=18,19,32,33
58	GEN=17,19,1
59	20 J=21,22,35,39
60	21 J=22,23,39,40
61	GEN=21,29,1
62	30 J=32,33,36,37
63	GEN=30,31,1
64	32 J=34,35,38,39
65	
66	LOAD
67	NAME=LOAD1 CSYS=0
68	TYPE=FORCE
69	ADD=31 Uz=-10000

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D



Gambar 1. Penomoran Nodal dan Elemen berdasarkan Masukan Data



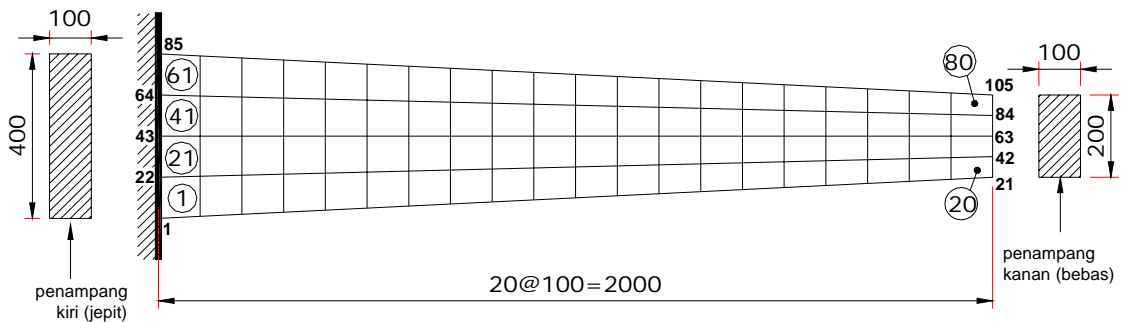
Gambar 2. Deformasi pada Model dengan 29 Elemen pada Titik Beban (mm)

**OUTPUT :**

```
SAP2000 v7.40 File: MODEL 1 N-mm Units PAGE 1
2/10/06 18:08:44
Balok kantilever non-prismatis (Soal No.3 Ujian Kualifikasi Doktor Unp)
JOINT DISPLACEMENTS
JOINT LOAD U1 U2 U3 R1 R2 R3
13 LOAD1 -0.0371 0.0000 -0.4115 0.0000 3.771E-04 0.0000
31 LOAD1 0.0000 0.0000 -0.4119 0.0000 3.715E-04 0.0000
48 LOAD1 0.0371 0.0000 -0.4115 0.0000 3.771E-04 0.0000
```

**B2. (balok dianalisis menggunakan elemen bidang yang lebih halus)**

Mesh m.e.h diperhalus untuk mengetahui perilaku konvergensinya

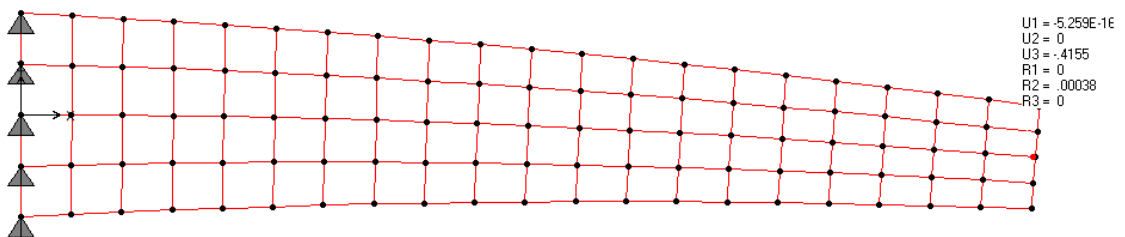


Gambar 5. Pemodelan dengan 80 Quadrilateral Plane Elemen

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryatmono, Ph.D

Baris	Input Data Model 3.S2K yang Disiapkan Secara Manual
1	Balok kantilever non-prismatis (Soal No.3.B3 mesh halus)
2	
3	SYSTEM
4	DOF=UX,UZ,RY LENGTH=mm FORCE=N PAGE=SECTIONS
5	
6	JOINT
7	1 x= 0.00 y=0 Z=-200.00
8	21 x=2000.00 z=-100.00
9	LGEN=1,21,1
10	22 x= 0.00 y=0 Z=-100.00
11	42 x=2000.00 z= -50.00
12	LGEN=22,42,1
13	43 x= 0.00 y=0 Z= 0.00
14	63 x=2000.00 z= 0.00
15	LGEN=43,63,1
16	64 x= 0.00 y=0 Z= 100.00
17	84 x=2000.00 z= 50.00
18	LGEN=64,84,1
19	85 x= 0.00 y=0 Z= 200.00
20	105 x=2000.00 z= 100.00
21	LGEN=85,105,1
22	
23	RESTRAINT
24	ADD=1,106,21 DOF=UX,UZ
25	
26	MATERIAL
27	NAME=BAHAN
28	E=200000 U=0.3
29	
30	SHELL SECTION
31	NAME=PELAT TYPE=MEMBR MAT=BAHAN TH=100
32	
33	SHELL
34	CSYS=0
35	1 J=1,2,22,23 SEC=PELAT
36	GEN=1,20,1
37	21 J=22,23,43,44
38	GEN=21,40,1
39	41 J=43,44,64,65
40	GEN=41,60,1
41	61 J=64,65,85,86
42	GEN=61,80,1
43	
44	LOAD
45	NAME=LOAD1 CSYS=0
46	TYPE=FORCE
47	ADD=63 Uz=-10000

OUTPUT :

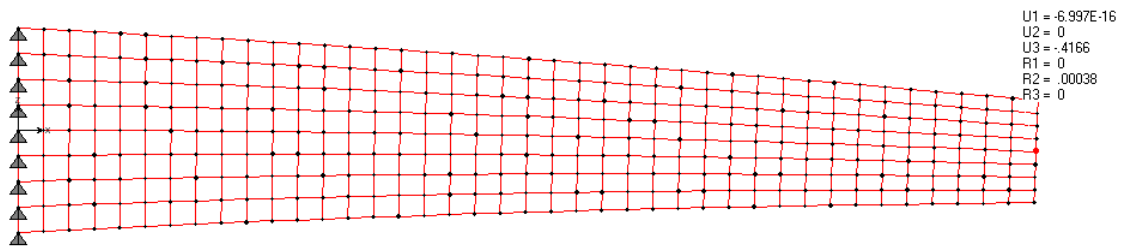


Gambar 6 Deformasi pada Model dengan 80 Elemen pada Titik Beban (mm)

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Prof. Bambang Suryoatmono, Ph.D

```
SAP2000 v7.40 File: MODEL 3 N-mm Units PAGE 1
3/16/06 0:31:34
Balok kantilever non-prismatis (Soal No.3.B3 mesh halus)
J O I N T   D I S P L A C E M E N T S
JOINT   LOAD      U1      U2      U3      R1      R2      R3
 21   LOAD1     -0.0373  0.0000  -0.4152  0.0000  3.793E-04  0.0000
 42   LOAD1     -0.0186  0.0000  -0.4152  0.0000  3.738E-04  0.0000
 63   LOAD1      0.0000  0.0000  -0.4155  0.0000  3.794E-04  0.0000
 84   LOAD1      0.0186  0.0000  -0.4152  0.0000  3.738E-04  0.0000
105   LOAD1      0.0373  0.0000  -0.4152  0.0000  3.793E-04  0.0000
```

Model dengan elemen di atas dapat digandakan dengan mudah sehingga dihasilkan model dengan pias elemen yang halus (320 pias) dan hasil lendutannya ditampilkan sebagai berikut:



Gambar 7 Deformasi pada Model dengan 320 Elemen pada Titik Beban (mm)

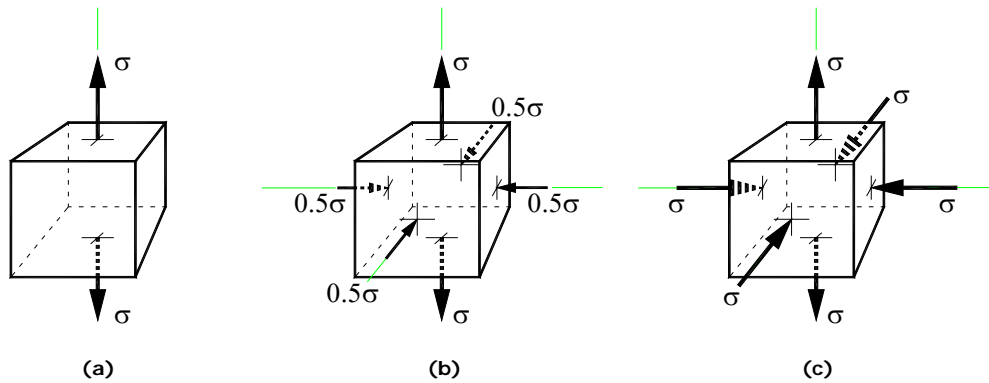
Tabel 1. Perbandingan hasil analisa (nodal ujung tengah)

Defleksi vertikal	Pendekatan model a1	Pendekatan model a2	Pendekatan model a3	m.e.h dng 29 elemen	m.e.h dng 80 elemen	m.e.h dng 320 elemen
$u_v$	0.3459 mm	0.3775 mm	0.3829 mm	0.4119 mm	0.4155 mm	0.4166 mm
% relatif	100%	109%	111%	119%	120%	120%

Pembahasan hasil

- Besarnya perbedaan antara masing-masing analisis diperlihatkan pada tabel (dalam %). Metode pendekatan hasilnya dipengaruhi oleh ukuran segmen yang digunakan, hal tersebut terlihat pada model a1 yang memakai ukuran terbesar maka lendutannya lebih kecil dibanding pada model a2 yang memakai ukuran rata-rata (lebih kecil). Deformasi geser jika diperhitungkan tidak terlalu *significant* (model a3).
- Pembuatan mesh pada m.e.h relatif sudah cukup baik, pembagian yang lebih rapat hanya menghasilkan perbedaan yang relatif kecil. Pada m.e.h, deformasi geser secara otomatis diperhitungkan, jadi lendutan relatif lebih besar dibanding a1 dan a2.
- Lendutan pada cara pendekatan dihitung memakai metode momen area, dimana untuk itu diperlukan statis momen perkalian luasan  $M/EI$  dari segmen dengan lengan momen,  $x_0$  yang dihitung dari titik berat luasan  $M/EI$  terhadap nodal yang dicari lendutannya (lihat Gambar 2). Dalam memperhitungkan titik berat luasan  $M/EI$  yang digunakan pada cara a dihitung dengan cara pendekatan saja (luasan  $M/EI$  dianggap sebagai bidang persegi) sehingga menghasilkan lengan momen yang lebih kecil dari yang sebenarnya. Jelas saja dihasilkan lendutan yang lebih kecil, karena berdasarkan metode momen area maka lendutan titik nodal adalah sama dengan jumlah kumulatif statis momen luasan  $M/EI$  dari segmen-segmen tersebut.

**Soal 4.**



Untuk kondisi tegangan pada elemen diferensial seperti terlihat dalam gambar (a), (b) dan (c), carilah tegangan  $\sigma$  yang menyebabkan leleh terjadi, apabila digunakan :

a. kriteria leleh Von Mises, b. kriteria leleh Tresca.

**Jawab**

Pertanyaan di atas berkaitan dengan permasalahan keruntuhan (*failure*), yang dimulai dengan timbulnya perilaku inelastis pada elemen struktur, berupa leleh (*yield*) atau fraktur (*fracture*).

Untuk material dengan tegangan multiaksial, ada kemungkinan bahwa perilaku inelastis (mulainya keruntuhan) dapat terjadi tanpa satupun dari komponen-komponen tegangan tersebut yang secara individu melampaui tegangan leleh uniaksial. Artinya, leleh dapat terjadi karena kondisi lain dan bukan hanya ditentukan oleh komponen tegangan secara individu. Untuk itu diperlukan kombinasi komponen-komponen tegangan menjadi suatu tegangan uniaksial efektif.

Tegangan uniaksial efektif tersebut kemudian dibandingkan dengan beberapa properti material, yang umumnya adalah tegangan leleh uniaksial dengan suatu “kriteria leleh tertentu” untuk memperkirakan mulai terjadinya respon inelastis.

**Kriteria Tresca (kriteria tegangan geser maksimum)**

Spesimen dengan tegangan multi-aksial dapat dianggap leleh jika tegangan geser maksimum salah satu titik spesimen tersebut menyamai tegangan geser maksimum,  $\tau_{max}$ , saat tegangan uniaksial tekan (tarik) mengalami leleh. Fungsi keruntuhan dari kriteria Tresca adalah

$$f = \tau_{max} - \frac{1}{2}Y$$

**Kriteria von Mises (kriteria berdasarkan densitas energi yang terdistorsi)**

Bahwa leleh akan mulai terjadi jika densitas energi yang terdistorsi pada suatu titik tertentu menyamai densitas energi yang terdistorsi pada saat leleh. Fungsi kriteria von Mises adalah

$$f = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - \frac{1}{3}Y^2$$

Atau rumusan lain yang lebih kompak yaitu  $f = \sigma_e^2 - Y^2$

Dimana  $\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

**Referensi**

- Arthur P. Boresi dan Richard J. Schmidt . (2003). “Advanced Mechanics of Materials 6<sup>th</sup> Ed.”, John Wiley & Sons, Inc.
- William F. Riley dan Loren Zachary. (1989). “Introduction to Mechanic of Materials”, John Wiley & Sons, Inc.

Tegangan yang akan dibahas semuanya merupakan tegangan utama karena tegangan geser = 0.

Kondisi (a) : Tegangan Uniaksial

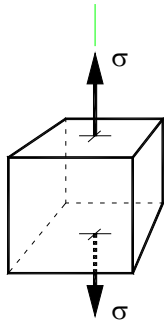
**Kriteria Tresca**

Untuk tegangan tarik uniaksial  $\sigma_1 = \sigma$  ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  ,

maka tegangan geser maksimum adalah  $\tau_{\max} = \sigma / 2$  ,

karena  $f = \tau_{\max} - \frac{1}{2}Y$  maka tegangan leleh  $Y = 2 \cdot \tau_{\max} = \sigma$

$\therefore$  leleh akan terjadi jika  $\sigma = \sigma_y$



**Kriteria von Mises ( $Y = \sigma_e$ )**

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma)^2]} = \sigma$$

$\therefore$  leleh akan terjadi jika  $\sigma = \sigma_e = \sigma_y$

Kondisi (b) : Tegangan Multiaksial

**Kriteria Tresca ,**

tegangan multi-aksial  $\sigma_1 = \sigma$  ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma / 2$  , maka

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} = \frac{|-\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}|}{2} = 0$$

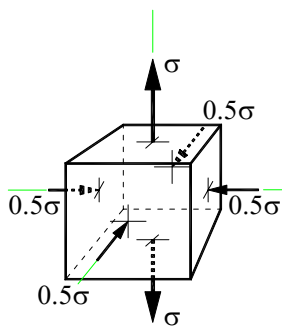
$$\tau_2 = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{|-\frac{\sigma}{2} - \sigma|}{2} = 0.75\sigma$$

$$\tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \frac{|\sigma + \frac{\sigma}{2}|}{2} = 0.75\sigma$$

nilai terbesar jadi  $\tau_{\max}$

Jadi  $\tau_{\max} = 0.75\sigma$  , krn  $f = \tau_{\max} - \frac{1}{2}Y$  maka  $Y = 2 \cdot \tau_{\max} = 1.5\sigma$

$\therefore$  leleh akan terjadi jika  $\sigma = \frac{2}{3}\sigma_y$



**Kriteria von Mises ( $Y = \sigma_e$ )**

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma + \frac{1}{2}\sigma)^2 + (-\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma)^2 + (-\frac{1}{2}\sigma - \sigma)^2]} = 1.5\sigma$$

$\therefore$  leleh akan terjadi jika  $\sigma = \frac{2}{3}\sigma_e = \frac{2}{3}\sigma_y$

Kondisi (c) : Tegangan Multiaksial

**Kriteria Tresca ,**

tegangan multi-aksial  $\sigma_1 = \sigma$  ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$  , maka

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} = \frac{|-\sigma + \sigma|}{2} = 0$$

$$\tau_2 = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{|-\sigma - \sigma|}{2} = \sigma$$

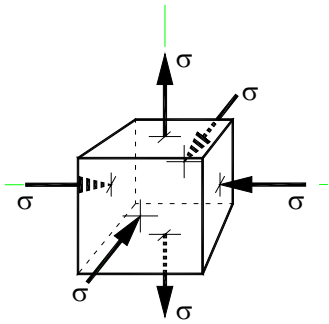
$$\tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \frac{|\sigma + \sigma|}{2} = \sigma$$

nilai terbesar merupakan  $\tau_{\max}$

Jadi  $\tau_{\max} = \sigma$  , karena  $f = \tau_{\max} - \frac{1}{2}Y$  maka tegangan leleh

$$Y = 2 \cdot \tau_{\max} = 2\sigma$$

$\therefore$  leleh akan terjadi jika  $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_y$



**Kriteria von Mises ( $Y = \sigma_e$ )**

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma + \sigma)^2 + (-\sigma + \sigma)^2 + (-\sigma - \sigma)^2]} = 2\sigma$$

$\therefore$  leleh akan terjadi jika  $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_e = \frac{1}{2}\sigma_y$

Kesimpulan:

Dari penyelesaian numerik yang diberikan di atas maka benarlah bahwa material dengan tegangan multiaksial menghasilkan perilaku inelastis (mulainya keruntuhan) pada tegangan yang lebih kecil dibanding dengan tegangan inelastis uni-aksial nya.

# UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

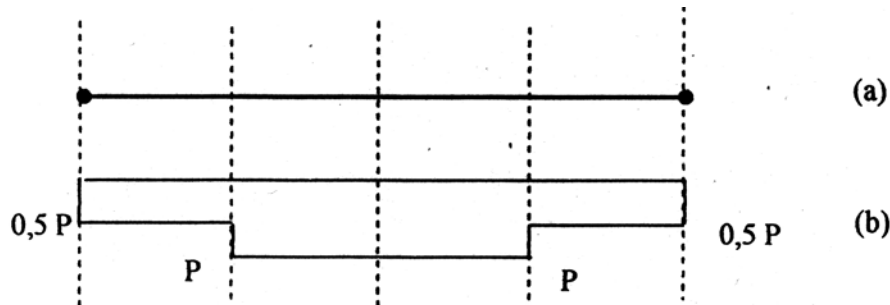
## PROGRAM PASCA SARJANA

### UJIAN KUALIFIKASI PROGRAM DOKTOR

Bulan/Tahun : Februari 2006  
Nama : Wiryanto Dewobroto  
Npm : 200383203

#### Soal 1

Diketahui sebuah batang prismatis mengalami gaya normal tidak konstan seperti pada Gambar 1



Gambar 1 (a) Batang prismatis  
(b) Diagram gaya normal

Diminta dengan menggunakan prinsip energi menghitung berapa besarnya  $P_{\text{kritis}}$  yang menyebabkan batang tersebut tertekuk. Kemudian menghitung pula  $P_{\text{kritis}}$  tersebut dengan metoda matrik kekakuan dan membandingkan hasilnya. Sebutkan anggapan-anggapan dalam analisis yang digunakan. Berikan komentar dan pembahasan.

#### Soal 2

Sebuah balok lengkung yang berbentuk busur lingkaran seperti pada Gambar 2. Penampang berbentuk persegi. Jari jari tepi luar adalah  $R_L$  dan jari jari tepi dalam adalah  $R_D$ . Material bersifat elastis linier.

Salah satu ujung terjepit dan ujung yang lain bebas. Beban terpusat bekerja pada ujung bebas seperti pada gambar tersebut.

Berikan pembahasan tentang analisis tegangan dan perpindahan struktur tersebut dan berikan contoh numeriknya. Bilakah persamaan untuk balok lurus masih dapat dipakai untuk kasus tersebut? Bilamana penampangnya bukan persegi apakah penyelesaian yang dibahas masih berlaku, berikan komentar.

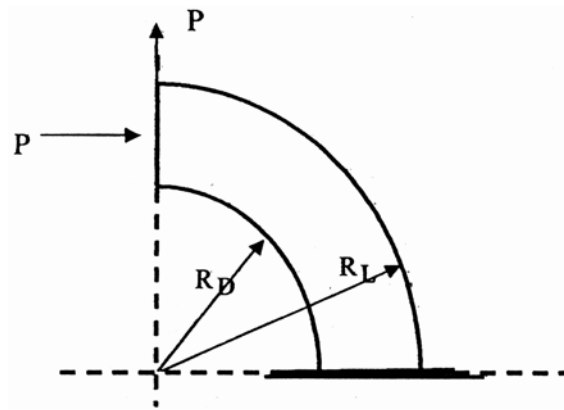


# UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

## PROGRAM PASCA SARJANA

### UJIAN KUALIFIKASI PROGRAM DOKTOR

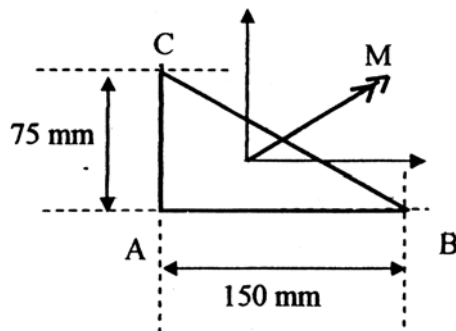
Bulan/Tahun : Februari 2006  
Nama : Wiryanto Dewobroto  
Npm : 200383203



Gambar 2 Balok lengkung

#### Soal 3

Sebuah balok dengan penampang berbentuk segitiga mengalami momen lentur Monica yang vektornya membentuk sudut  $\beta$  terhadap sumbu  $y$ . (Gambar 3.)



Ditanya : Bila sudut  $\beta = 30$  dan Momen =  $6\text{ kiloNewton-meter}$ , berapakah tegangan lentur di Anne, B dan Christo dan tentukan arah dari garis netral.

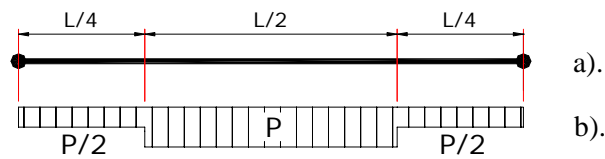
Berapakah sudut  $\beta$  agar garis netral sejajar dengan  $AC$  ?

Sebutkan anggapan-anggapan dalam analisis yang digunakan.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

### Soal 1.

Diketahui sebuah batang prismatis mengalami gaya normal tidak konstan seperti terlihat pada gambar berikut.



Gambar 1. 1 a). Batang Prismatis dan b). Diagram Gaya Normal

Diminta dengan menggunakan prinsip energi untuk menghitung berapa besarnya beban  $P_{kritis}$  yang menyebabkan batang tersebut tertekuk. Kemudian hitung pula  $P_{kritis}$  dengan cara lain yaitu metoda matrik kekakuan dan dibandingkan hasilnya. Sebutkan anggapan-anggapan dalam analisis yang digunakan. Berikan komentar dan pembahasan.

### Jawaban – a). Penyelesaian dengan Prinsip Energi

Referensi

- Alexander Chajes .(1974). “Principles of Structural Stability Theory”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey
- Theodore R. Tauchert .(1974). “Energy Principles in Structural Mechanis”, Mc.Graw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo
- Timoshenko, S.P. dan Gere, J.M. (1963). “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill Int.

Suatu elemen batang yang relatif langsing dan diberi pembebanan tekan, dapat mengalami tekuk (*buckling*) sedemikian rupa sebelum mencapai tegangan leleh materialnya. Sedangkan batang yang relatif cukup kaku maka keruntuhan ditentukan oleh bahan materialnya, yaitu dengan terjadinya leleh terlebih dahulu. Sedangkan elemen batang langsing dengan beban tarik tidak akan mengalami tekuk, kekuatannya hanya ditentukan oleh materialnya saja yaitu akibat adanya leleh atau fraktur. Selain beban tekan dan faktor kelangsingan maka tekuk juga ditentukan oleh faktor perletakan.

Untuk menyelesaikan kasus di atas tentu saja harus diambil asumsi-asumsi, yaitu:

- Batang prismatis (Gambar 1.1) terdiri dari material yang homogen dan bersifat elastis linier mengikuti hukum Hooke, yaitu dengan modulus elastis  $E$ .
- Salah satu perletakan di ujung elemen batang berupa sendi sehingga tidak terjadi translasi tetapi dapat bebas berotasi. Sedang ujung yang lain berupa rol yang dapat menahan translasi tegak lurus elemen dan memungkinkan terjadinya translasi searah sumbu batang. Dengan demikian akibat beban tekan elemen dapat mengalami perpendekkan.



Gambar 1. 2 Kondisi Perletakan Elemen Tekan

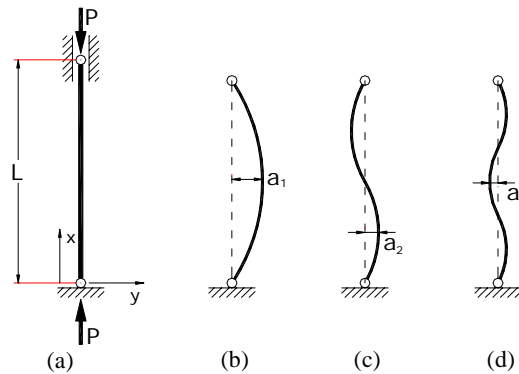
- Elemen batang dianggap benar-benar lurus (*perfectly straight*) dan beban tekan diberikan pada sumbu penampang (*centroidal axis*).
- Deformasi batang yang terjadi dianggap relatif sangat kecil.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

Solusi eksak tekuk dapat dicari dengan elastisitas, cara lainnya adalah metoda energi, berdasarkan cara pendekatan (cara yang diminta pada soal).

Ketelitian metode energi tergantung dari asumsi bentuk kurva lendutan. Untuk kolom dengan tumpuan sendi-rol (seperti pada gambar di bawah), kurva lendutan pada saat tekuk dapat diwakili dalam bentuk deret Fourier sinus :

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots + a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \dots\dots\dots (1.1)$$



Gambar 1.3 Kurva Sinusoidal

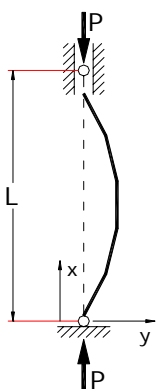
Setiap bagian dari deret Fourier tersebut memenuhi kondisi batas ujung kolom karena nilainya maupun derivatif kedua-nya adalah nol di  $x=0$  dan  $x=L$ . Dengan demikian lendutan dan bending momen juga nol pada ujung kolom. Secara geometri persamaan (1.1) merupakan lendutan sebenarnya dari kurva kolom yang dapat dihasilkan dari men-super-posisi kurva sinusoidal yang diperlihatkan pada Gambar 1.3 (b ~ d). Bagian pertama dari deret persamaan (1.1) diwakili oleh kurva pada Gambar 1.3 (b), bagian ke-dua oleh Gambar 1.3 (c) dan seterusnya. Koefisien  $a_1, a_2, a_3, \dots$  deret persamaan Fourier tersebut merupakan simpangan atau amplitudo maksimum dari kurva sinus yang berturut-turut dan angka 1, 2, 3, ... yang diikuti dengan  $\pi$  merupakan jumlah setengah gelombang kurva sinus tersebut.

Menurut buku teks Calculus lanjut dapat dibuktikan bahwa dengan menetapkan nilai  $a$  yang tepat, deret Fourier tersebut dapat digunakan untuk mewakili kurva lendutan yang terjadi.

Dari kurva pada Gambar 1.3 dapat terlihat bahwa kurva (b) menghasilkan simpangan yang paling besar sehingga deret pada Persamaan (1.1) dapat dipersingkat sebagai berikut.

$$y = a \sin \frac{\pi x}{L} \dots\dots\dots (1.2)$$

Selanjutnya dicari energi regangan



energi regangan lentur adalah

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} (y'')^2 dx$$

Untuk elemen dengan kekakuan lentur konstan EI maka dapat diperoleh energi regangan sbb

$$U = \frac{EI}{L} \int_0^L \left( -\frac{a\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} a^2$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

energi gaya luar adalah, dengan menganggap beban simetri terhadap tengah bentang pada

$$V = -2 \left[ \int_0^{0.25L} \frac{1/2 P}{2} (y')^2 dx + \int_{0.25L}^{0.5L} \frac{P}{2} (y')^2 dx \right]$$

$$V = -P \left[ \frac{1}{2} \int_0^{0.25L} (y')^2 dx + \int_{0.25L}^{0.5L} (y')^2 dx \right]$$

$$V = -P \frac{a^2 \pi^2}{L^2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{0.25L} \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx + \int_{0.25L}^{0.5L} \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx \right]$$

$$V = -\frac{Pa^2 \pi^2}{L^2} [0.1023L + 0.0454L] = -0.1477 \frac{Pa^2 \pi^2}{L}$$

Jadi total energi potensi

$$U + V = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} a^2 - 0.1477 \frac{Pa^2 \pi^2}{L} \dots\dots\dots (1.2)$$

Untuk bentuk lendutan yang berkeseimbangan, total energi potensi di atas perlu nilai stationer (tetap). Karena energi merupakan fungsi a maka nilai stationer tersebut diderifasikan terhadap a dan dalam kondisi seimbang, sehingga.

$$\frac{d(U + V)}{da} = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} a - 0.29544 \frac{Pa \pi^2}{L} = 0 \text{ disederhanakan } \rightarrow a \left( \frac{\pi^4 EI}{2L^3} - 0.29544 \frac{P \pi^2}{L} \right) = 0$$

Solusi trivial pada kondisi keseimbangan untuk nilai a = 0 menghasilkan P<sub>kritis</sub> sbb :

$$\frac{\pi^4 EI}{2L^3} = 0.29544 \frac{P \pi^2}{L} \rightarrow \boxed{P_{kritis} = 1.6924 \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

**Jawaban – b1). Penyelesaian dengan Metode Matrik Kekakuan**

Referensi : Alexander Chajes .(1974). “Principles of Structural Stability Theory”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey → halaman 133

Metoda matrik kekakuan dapat digunakan untuk mempeleajari perilaku elemen batang terhadap beban aksial dengan batasan-batasan sebagai berikut:

- a. Struktur dengan lendutan kecil (*small displacement*), konfigurasi geometri dapat dianggap sama, sebelum dan sesudah pembebanan.
- b. Material dalam kondisi elastik linier.
- c. Berat sendiri struktur diabaikan
- d. Deformasi geser dan deformasi aksial diabaikan

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

Kekakuan elemen yang menerima beban aksial dan bending adalah fungsi dari beban aksial dan relasi gaya-lendutan nya mengambil bentuk

$$[Q] = \{[K] + P[K_1]\}[\Delta] \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

Dimana [Q] berisi gaya transversal yang menyebabkan lentur, [\Delta] berisi deformasi lentur yang berkesesuaian dan P adalah gaya aksial. Matrik Kekakuan dari elemen batang tersebut terdiri dari dua bagian, [K] adalah matrik kekakuan standar dari elemen batang terhadap lentur, dan [K<sub>1</sub>] adalah matrik yang memperhitungkan pengaruh gaya aksial P terhadap kekakuan lentur elemen batang tersebut.

Persamaan (1.3) dapat digunakan untuk menghitung lendutan beam-kolom, dan dapat juga untuk menghitung beban kritis dari elemen batang tekan tersebut. Beban kritis adalah beban aksial tekan yang menyebabkan kekakuan struktur tersebut hilang.

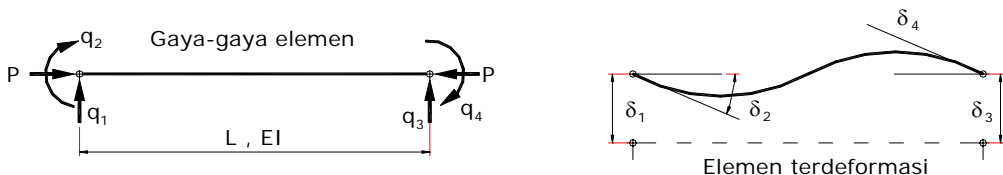
Dengan menulis ulang persamaan tersebut menjadi format berikut

$$[\Delta] = \{[K] + P[K_1]\}^{-1}[Q] \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

Terlihat bahwa kekakuan elemen batang dapat hilang jika [\Delta] bertambah tanpa ada penambahan [Q]. Hal itu hanya dapat terjadi jika invers matrik kekakuan matrik menjadi tidak terhingga. Karena invers matrik dihasilkan dari membagi matrik tersebut dengan determinannya maka invers matrik menjadi tak terhingga jika determinannya nol (zero). Jadi beban kritis dihasilkan dengan menetapkan determinan matrik tersebut bernilai nol.

Matrik [K] adalah matrik kekakuan untuk balok menerus, sedangkan matrik [K<sub>1</sub>] yang juga disebut *initial-stress stiffness matrix*, penurunannya didasarkan prinsip konservasi energi matrik (Chajes 1974), kedua matrik tersebut nilai-nilainya adalah sebagai berikut.

$$[k] = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1.5)$$



Gambar 1. 4 Interaksi Gaya dan Lendutan pada Model Elemen

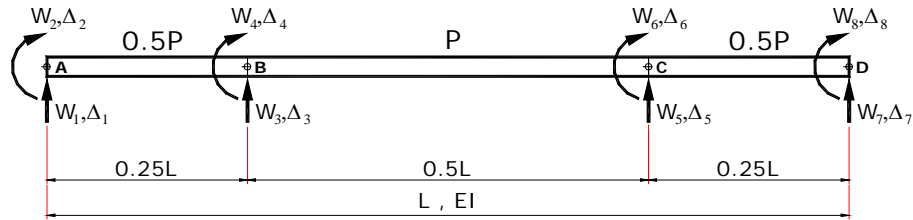
Perhitungan menggunakan metode matrik dapat sangat terbantu jika bagian-bagian matriks tersebut mempunyai dimensi yang sama. Hal tersebut dapat dilakukan dengan memodifikasi gaya dan lendutan pada matrik tersebut sehingga semuanya mempunyai unit satuan Gaya saja untuk vektor beban dan juga unit satuan Panjang untuk lendutan, bentuk seperti itu dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \frac{q_3}{L} \\ \frac{q_4}{L} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 L \\ \delta_3 \\ \delta_4 L \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

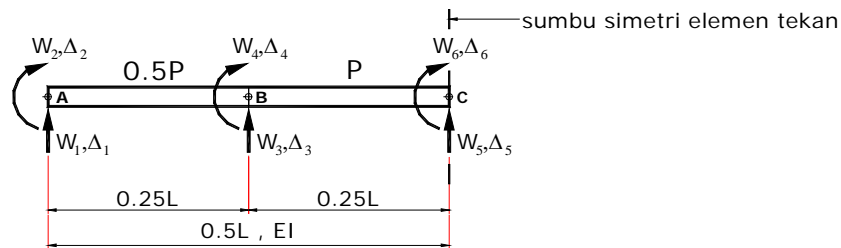
Bentuk seperti di atas sangat membantu jika matrik kekakuan tersebut akan di-invers.

Selanjutnya metode tersebut akan diaplikasikan ke problem yang sebelumnya telah dianalisis dengan metode energi non-matrik. Elemen tekan dimodelkan sebagai tiga elemen diskrit akibat beban P yang berbeda, sebagai berikut :



Gambar 1. 5 Pemodelan Elemen Sesuai Konfigurasi Balok pada Soal 1

Karena masalah di atas adalah simetri maka dapat ditinjau separo bentang saja sebagai berikut.



Gambar 1. 6 Pemodelan Elemen Separo Bentang (karena Simetri)

**Balok AB**

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ \frac{4W_2}{L} \\ W_3 \\ \frac{4W_4}{L} \end{bmatrix} = \left\{ 64 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 2 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \frac{\Delta_2 L}{4} \\ \Delta_3 \\ \frac{\Delta_4 L}{4} \end{bmatrix}$$

**Balok BC**

$$\begin{bmatrix} W_3 \\ \frac{4W_4}{L} \\ W_5 \\ \frac{4W_6}{L} \end{bmatrix} = \left\{ 64 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 4 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \frac{\Delta_4 L}{4} \\ \Delta_5 \\ \frac{\Delta_6 L}{4} \end{bmatrix}$$

Pindahkan kematrik global berukuran 6 x 6

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

Matrik kekakuan

$$64 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & \cdot & \cdot \\ -6 & 4 & 6 & 2 & \cdot & \cdot \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ \cdot & \cdot & -12 & 6 & 12 & 6 \\ \cdot & \cdot & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 2 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} + \frac{12}{5} & \frac{1}{10} - \frac{2}{10} & -\frac{12}{5} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} - \frac{2}{10} & \frac{2}{15} + \frac{4}{15} & \frac{2}{10} & -\frac{2}{30} \\ \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{2}{10} & \frac{12}{5} & \frac{2}{10} \\ \cdot & \cdot & -\frac{2}{10} & -\frac{2}{30} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

$$64 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & \cdot & \cdot \\ -6 & 4 & 6 & 2 & \cdot & \cdot \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ \cdot & \cdot & -12 & 6 & 12 & 6 \\ \cdot & \cdot & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 2 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} & \frac{1}{5} \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

Vektor beban =  $\begin{bmatrix} W_1 \\ \frac{4W_2}{L} \\ 2W_3 \\ \frac{8W_4}{L} \\ W_5 \\ \frac{4W_6}{L} \\ L \end{bmatrix}$  sedangkan vektor lendutan  $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \frac{1}{4} \Delta_2 L \\ 2\Delta_3 \\ \frac{1}{2} \Delta_4 L \\ \Delta_5 \\ \frac{1}{4} \Delta_6 L \end{bmatrix}$

**Masukkan kondisi batas**

Ujung kiri dianggap sebagai sendi sehingga  $\Delta_1=0$  (translasi tidak ada)

Ujung kanan sebagai sumbu simetri sehingga  $\Delta_6=0$  (rotasi tidak ada)

Sehingga matrik [K] tersebut menjadi

$$[K] = 64 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & \cdot \\ 6 & 24 & 0 & -12 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \\ \cdot & -12 & 6 & 12 \end{bmatrix} - 2 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot \\ \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Untuk menyederhanakan format, matrik dibagi dengan  $\frac{EI}{L^3}$

Selanjutnya pakai notasi  $\lambda = \frac{2PL^2}{EI}$  sehingga

$$[K] = 64 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & \cdot \\ 6 & 24 & 0 & -12 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \\ \cdot & -12 & 6 & 12 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot \\ \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

Dengan bantuan Mathcad dapat disederhanakan menjadi

$$64 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 24 & 0 & -12 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & -12 & 6 & 12 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-1}{30} & \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{-12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 256 - \frac{2}{15} \cdot a & 384 - \frac{1}{10} \cdot a & 128 + \frac{1}{10} \cdot a & 0 \\ 384 - \frac{1}{10} \cdot a & 1536 - \frac{18}{5} \cdot a & \frac{1}{10} \cdot a & -768 + \frac{12}{5} \cdot a \\ 128 + \frac{1}{30} \cdot a & \frac{1}{10} \cdot a & 512 - \frac{2}{5} \cdot a & 384 - \frac{1}{5} \cdot a \\ 0 & -768 + \frac{12}{5} \cdot a & 384 - \frac{1}{5} \cdot a & 768 - \frac{12}{5} \cdot a \end{pmatrix}$$

Pada waktu buckling det [K]=0 oleh karena det[K] harus dicari terlebih dahulu.

Dengan bantuan Mathcad diperoleh

$$\det[K] = 2415919104 - 84305510 \cdot 4 \alpha + 430080 \lambda^2 - 502.272 \lambda^3 + 0.122 \lambda^4$$

$$\text{Maka } \det [K]=0 \rightarrow 2415919104 - 84305510 \cdot 4 \alpha + 430080 \lambda^2 - 502.272 \lambda^3 + 0.122 \lambda^4 = 0$$

diperoleh  $\alpha_1 = 34.479$  ;  $\alpha_2 = 229.82$  ;  $\alpha_3 = 825.554$  dan  $\alpha_4 = 3027$

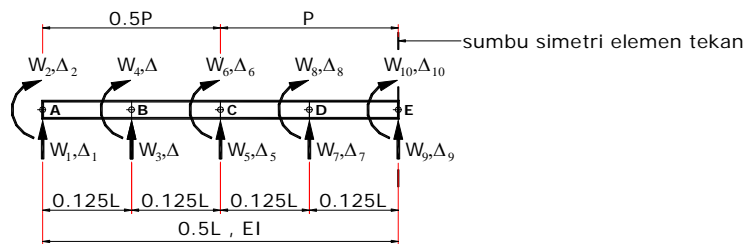
Diambil nilai terkecil yaitu  $\lambda = 34.479$  ,

karena  $\lambda = \frac{2PL^2}{EI}$  maka  $P = 17.2395 \frac{EI}{L^2}$  yang merupakan nilai kritis, jadi

$$P_{kritis} = 17.2395 \frac{EI}{L^2}$$

**Jawaban – b2). Metode Matrik Kekakuan dengan pias yang lebih banyak**

Untuk mengetahui konvergensi struktur, maka dilakukan analisis ulang dengan jumlah elemen yang lebih banyak dan akan dibandingkan hasilnya.



**Gambar 1.7** Pemodelan Banyak Elemen dalam Separo Bentang (Simetri)

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \frac{1}{L} = \left\{ \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 L \\ \delta_3 \\ \delta_4 L \end{bmatrix} \dots (1.6)$$



Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

**Balok AB**

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ \frac{8W_2}{L} \\ W_3 \\ \frac{8W_4}{L} \end{bmatrix} = \left\{ 512 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 4 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \frac{\Delta_2 L}{8} \\ \Delta_3 \\ \frac{\Delta_4 L}{8} \end{bmatrix}$$

**Balok BC**

$$\begin{bmatrix} W_3 \\ \frac{8W_4}{L} \\ W_5 \\ \frac{8W_6}{L} \end{bmatrix} = \left\{ 512 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 4 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \frac{\Delta_4 L}{8} \\ \Delta_5 \\ \frac{\Delta_6 L}{8} \end{bmatrix}$$

**Balok CD**

$$\begin{bmatrix} W_5 \\ \frac{8W_6}{L} \\ W_7 \\ \frac{8W_8}{L} \end{bmatrix} = \left\{ 512 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 8 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta_5 \\ \frac{\Delta_6 L}{8} \\ \Delta_7 \\ \frac{\Delta_8 L}{8} \end{bmatrix}$$

**Balok DC**

$$\begin{bmatrix} W_7 \\ \frac{8W_8}{L} \\ W_9 \\ \frac{8W_{10}}{L} \end{bmatrix} = \left\{ 512 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 8 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta_7 \\ \frac{\Delta_8 L}{8} \\ \Delta_9 \\ \frac{\Delta_{10} L}{8} \end{bmatrix}$$

Pindahkan kematrik global berukuran 10 x 10

Matrik kekakuan

$$[\Delta] = \{ [K] + P[K_1] \}^{-1} [Q]$$

$$[K] = 512 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -6 & 4 & 6 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -12 & 6 & 12 & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

$$[K_1] = -4 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{12}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{24}{5} & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{8}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} & \frac{1}{5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

**Masukkan kondisi batas**

Ujung kiri dianggap sebagai sendi sehingga  $\Delta_1 = 0$  (translasi tidak ada)

Ujung kanan sebagai sumbu simetri sehingga  $\Delta_{10} = 0$  (rotasi tidak ada)

Sehingga matrik [K] tersebut menjadi

$$[K] = 512 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & \cdot \\ \cdot & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -12 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = -4 \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{10} & \frac{12}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{24}{5} & 0 & -\frac{12}{5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{8}{15} & \frac{1}{5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Untuk menyederhanakan format matrik dibagi dengan  $\frac{EI}{L^3}$  dan

dipakai variabel  $\lambda = \frac{4PL^2}{EI}$  sehingga

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

$$[K] = 512 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & \cdot \\ \cdot & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -12 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad [K_1] = -\lambda \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{10} & \frac{12}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{24}{5} & 0 & -\frac{12}{5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{8}{15} & \frac{1}{5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Dengan bantuan Mathcad dapat disederhanakan menjadi

$$512 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 12 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{12}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{18}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{24}{5} & 0 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{8}{15} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2048 - \frac{2}{15} \cdot a & 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 12288 - \frac{12}{5} \cdot a & 0 & -6144 + \frac{6}{5} \cdot a & -3072 + \frac{1}{10} \cdot a & 0 & 0 & 0 \\ 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & 0 & 4096 - \frac{4}{15} \cdot a & 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6144 + \frac{6}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 12288 - \frac{18}{5} \cdot a & \frac{1}{10} \cdot a & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a & -3072 + \frac{1}{5} \cdot a & 0 \\ 0 & -3072 + \frac{1}{10} \cdot a & 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & \frac{1}{10} \cdot a & 4096 - \frac{2}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a & 1024 + \frac{1}{15} \cdot a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a & 12288 - \frac{24}{5} \cdot a & 0 & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & -3072 + \frac{1}{5} \cdot a & 1024 + \frac{1}{15} \cdot a & 0 & 4096 - \frac{8}{15} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a & 6144 - \frac{12}{5} \cdot a \end{pmatrix}$$

Jadi bentuk sederhana dari matrik  $\{[K] + P[K_1]\}$  adalah

$$\begin{pmatrix} 2048 - \frac{2}{15} \cdot a & 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 12288 - \frac{12}{5} \cdot a & 0 & -6144 + \frac{6}{5} \cdot a & -3072 + \frac{1}{10} \cdot a & 0 & 0 & 0 \\ 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & 0 & 4096 - \frac{4}{15} \cdot a & 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6144 + \frac{6}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{10} \cdot a & 12288 - \frac{18}{5} \cdot a & \frac{1}{10} \cdot a & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a & -3072 + \frac{1}{5} \cdot a & 0 \\ 0 & -3072 + \frac{1}{10} \cdot a & 1024 + \frac{1}{30} \cdot a & \frac{1}{10} \cdot a & 4096 - \frac{2}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a & 1024 + \frac{1}{15} \cdot a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a & 12288 - \frac{24}{5} \cdot a & 0 & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & -3072 + \frac{1}{5} \cdot a & 1024 + \frac{1}{15} \cdot a & 0 & 4096 - \frac{8}{15} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 + \frac{12}{5} \cdot a & 3072 - \frac{1}{5} \cdot a & 6144 - \frac{12}{5} \cdot a \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dicari  $\det \{[K] + P[K_1]\} = 0$

Dimana determinannya adalah

$$\frac{433}{10000} \cdot a^8 - \frac{1638912}{625} \cdot a^7 + \frac{35347890176}{625} \cdot a^6 - \frac{348611221127168}{625} \cdot a^5 + \frac{1664872878916501504}{625} \cdot a^4 - \frac{749727740767248580608}{125} \cdot a^3 + \frac{144121529144131209658368}{25} \cdot a^2 - \frac{9180280442698590295425024}{5} \cdot a + 979229913887849631512002$$

Jika p(a)= determinan tersebut di atas maka dengan prosedur MathCad diperoleh

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

$$v := p(a) \text{ coeffs, } a \rightarrow \begin{pmatrix} .97922991388785e26 \\ -.18360560885397180000e25 \\ .57648611657652400000e22 \\ -5997821926137992000.0 \\ 2663796606266400.0000 \\ \frac{-348611221127168}{625} \\ \frac{35347890176}{625} \\ \frac{-1638912}{625} \\ \frac{433}{625} \\ \frac{10000}{10000} \end{pmatrix} \quad r := \text{polyroots}(v) \quad r = \begin{pmatrix} 66.157 \\ 463.988 \\ 1.401 \times 10^3 \\ 2.742 \times 10^3 \\ 5.433 \times 10^3 \\ 9.049 \times 10^3 \\ 1.45 \times 10^4 \\ 2.69 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Diambil nilai positif terkecil yaitu  $\lambda = 66.157$ ,

karena  $\lambda = \frac{4PL^2}{EI}$  maka  $P = 16.5393 \frac{EI}{L^2}$  yang merupakan nilai kritis, jadi

$$P_{kritis} = 16.5393 \frac{EI}{L^2}$$

**Perbandingan hasil**

Selanjutnya ke tiga penyelesaian tentang  $P_{kritis}$  dibandingkan dalam bentuk tabel sbb:

Keterangan	Prinsip Energi (analitis)	Matrik Kekakuan	
		(4 elemen)	(2 elemen)
$P_{kritis}$	$1.6924 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ atau $16.7033 \frac{EI}{L^2}$	$16.5393 \frac{EI}{L^2}$	$17.2395 \frac{EI}{L^2}$
% relatif	101%	100%	104%

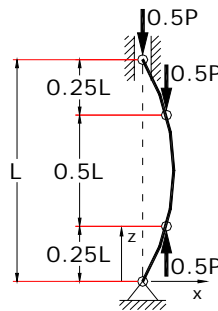
Meskipun metode yang digunakan berbeda, tetapi hasil ketiganya mirip satu sama lain. Jika metode matrik kekakuan yang digunakan dengan jumlah elemen yang lebih banyak dianggap lebih eksak (mendekati nilai yang dianggap terjadinya konvergensi) maka dapat disimpulkan bahwa fungsi bentuk  $y = a \sin \frac{\pi x}{L}$  yang diambil pada waktu menurunkan energi cukup teliti untuk menghasilkan bentuk lendutan yang terjadi pada waktu *buckling*.

**Verifikasi Soal 3 dengan program SAP2000**

Hasil penyelesaian manual pada Soal 3 akan dianalisis ulang memanfaatkan program komersil SAP2000 versi 9.0.3 yang mempunyai option untuk analisis non-linier *buckling*.

Karena kemudahan dalam pembuatan model memakai program tersebut maka ditinjau model 3D dalam skala penuh (pada cara manual hanya ditinjau separo bentang saja). Adapun bentuk model dan beban yang digunakan diperlihatkan pada gambar bawah. Tumpuan kolom bagian bawah berupa sendi pada ketiga sumbu dimana  $\delta_x=0$ ;  $\delta_y=0$ ;  $\delta_z=0$ , sedangkan pada bagian atas sendi hanya pada arah lateral  $\delta_x=0$ ;  $\delta_y=0$ , deformasi  $\delta_z$  ada (tidak ada restraint).

Beban diberikan pada ketiga tempat sebagaimana terlihat pada gambar.



**Gambar 1.8 Penempatan Beban dan Model untuk Analisis Buckling**

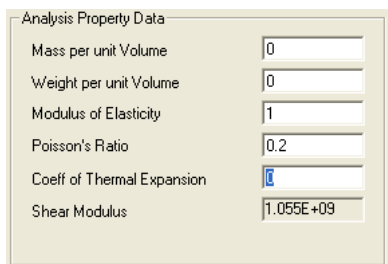
Untuk mendapatkan ketelitian maka panjang kolom dibagi dalam 8 segmen elemen dan agar dapat dibandingkan dengan hasil analisis manual maka deformasi aksial dan geser diabaikan.

Nilai numerik dan parameter yang digunakan dalam analisis adalah:

Unit satuan	Kg-m
E	1 kg/m <sup>2</sup>
P	1 kg
L	1 m

Dengan maksud agar hasil analisis ini juga dapat digunakan sebagai acuan maka penyelesaian akan diberikan dalam bentuk langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

1. Panggil program SAP2000 versi 9.0.3, dari tampilan awal tentukan unit satuan yang digunakan yaitu : **kgf, m, C** .
2. Bikin geometri panjang kolom 1 m yang dibagi dalam 8 segmen, atur restraint tumpuan.
3. Berat sendiri diabaikan melalui **Define - Load Case - Self weight multiplier = 0**
4. Tetapkan material melalui **Define – Materials – Other – Modify / Show Material** sbb:



Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

5. Tetapkan section properti melalui Define – Frame Sections – Add General lalu klik tombol Add New Propertis. Dari jendela Property Data masukkan parameter berikut :

Properties	
Cross-section (axial) area	1e10
Torsional constant	1.
Moment of Inertia about 3 axis	1.
Moment of Inertia about 2 axis	1.
Shear area in 2 direction	0
Shear area in 3 direction	0

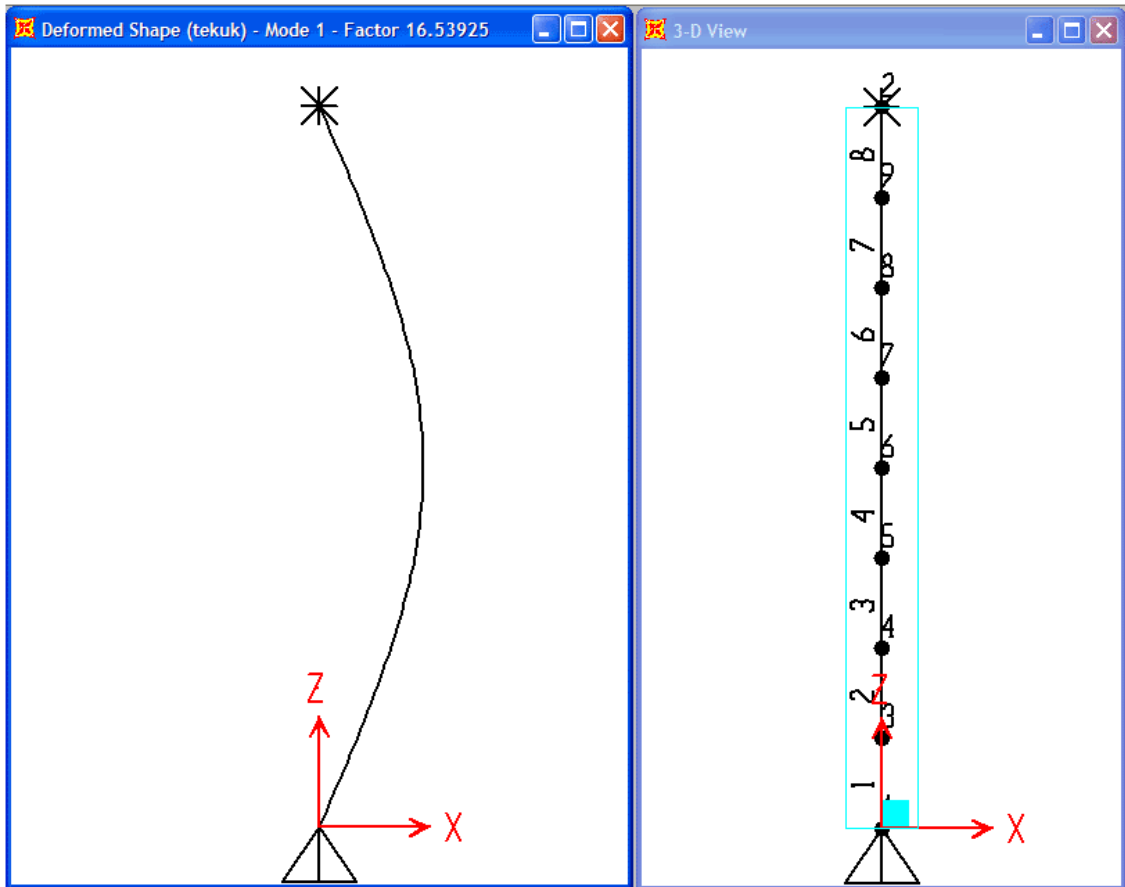
Catatan : deformasi aksial dan geser diabaikan.

Jangan lupa untuk meng-assign parameter section properties di atas dengan material yang telah didefinisikan terdahulu yaitu material dengan label OTHER. Selanjutnya elemen frame yang telah dibuat sebelumnya di-assign memakai parameter ini. Caranya pilih semua elemen dan dari menu Assign – Frame/Cable/Tendon – Frame Sections lalu pilih dari list nama section properti yang baru dibuat.

6. Beri beban sebesar 0.5 kg , dua nodal pada arah z negatif (ke bawah) dan satu nodal pada arah z positif (ke atas). Beban nodal dapat diberikan pada struktur setelah terlebih dahulu nodal yang akan diberi beban dipilih terlebih dahulu (memakai kursor) selanjutnya pakai menu perintah Assign – Joint Loads – Forces .
7. Untuk mengangtifkan option analisis buckling digunakan menu Define – Analysis Cases – Add New Cases dan selanjutnya dari pilihan Analysis Case Type pilih Buckling sbb:

Analysis Case Data - Buckling		
Analysis Case Name: tekuk		Analysis Case Type: Buckling
<input checked="" type="radio"/> Zero Initial Conditions - Unstressed State <input type="radio"/> Stiffness at End of Nonlinear Case		
Important Note: Loads from the Nonlinear Case are NOT included in the current case		
Loads Applied		
Load Type	Load Name	Scale Factor
Load	DEAD	1
Load	DEAD	1
<input type="button" value="Add"/> <input type="button" value="Modify"/> <input type="button" value="Delete"/>		
Other Parameters		
Number of Buckling Modes	6	
Eigenvalue Convergence Tolerance	1.000E-07	
		<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/>

8. Run analysis (F5)



Gambar 1.9 Hasil analisa tekuk mode1 memakai program SAP2000 ver 9.0.3

SAP2000 v9.0.3 3/17/06 12:55:54

**Table: Buckling Factors**

OutputCase	StepType	StepNum	ScaleFactor
Text	Text	Unitless	Unitless
tekuk	Mode	1.000000	16.539254
tekuk	Mode	2.000000	30.431232
tekuk	Mode	3.000000	52.320507
tekuk	Mode	4.000000	73.562059
tekuk	Mode	5.000000	115.996881
tekuk	Mode	6.000000	162.662433

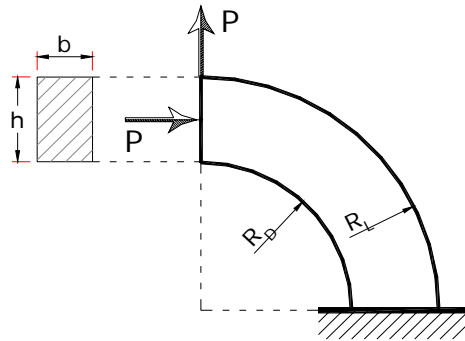
Karena  $P = 1$  dan ScaleFactor terkecil adalah 16.539254 maka beban  $P_{kritis} = 16.539254$ .

∴ hitungan manual nilainya sama dengan hasil analisis SAP2000.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

## Soal 2.

Sebuah balok lengkung yang berbentuk busur lingkaran seperti pada gambar dibawah. Penampang berbentuk persegi. Jari-jari tepi luar adalah  $R_L$  dan jari-jari tepi dalam adalah  $R_D$ . Material yang digunakan bersifat elastis linier. Salah satu ujung terjepit dan ujung yang lain bebas. Beban terpusat bekerja pada ujung bebas seperti pada gambar tersebut.



Gambar 2.1 Balok Lengkung

Berikan pembahasan tentang analisis tegangan dan perpindahan struktur tersebut dan berikan contoh numeriknya. Bilakah persamaan untuk balok lurus masih dapat dipakai untuk kasus tersebut? Bilamana penampangnya bukan persegi, apakah penyelesaian yang dibahas masih berlaku, berikan komentar.

## Jawaban

### Tegangan pada Balok Lengkung

Teori tegangan balok lentur yang memakai rumus  $\sigma = \frac{My}{I}$  validitasnya terbatas pada balok lurus atau dengan kelengkungan yang relatif besar dibandingkan dengan tinggi baloknya. Jika rasio jari-jari kelengkungan,  $R$  terhadap tinggi balok,  $h$  kurang dari 5 maka formula tersebut tidak valid lagi karena dapat menghasilkan *error* pada sisi yang tidak konservatif (membahayakan) yaitu nilainya lebih kecil dibanding nilai yang sebenarnya.

Oleh karena itu untuk menganalisis balok lengkung di atas maka parameter kelengkungan  $R = (R_L + R_D)/2$  dan tinggi balok  $h = (R_L - R_D)$  perlu diperhatikan, untuk rasio kelengkungan  $R/h < 5$  maka teori balok lengkung berikut harus digunakan. Pernyataan tersebut sekaligus dapat digunakan sebagai jawaban atas pertanyaan soal yang berkaitan dengan pemakaian rumus balok lurus untuk menyelesaikan kasus balok lengkung pada Gambar 2.1.

Buku-buku literatur mengenai teori balok lengkung relatif sedikit, adapun yang sempat dibaca dan pelajari adalah :

- Arthur P. Boresi dan Richard J. Schmidt . (2003). “Advanced Mechanics of Materials 6<sup>th</sup> Ed.”, John Wiley & Sons, Inc.
- Robert D. Cook dan Warren C. Young . (1999). “Advanced Mechanics of Materials 2<sup>nd</sup> Ed.”, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey
- Timoshenko, S. (1955). “Strength of Materials : Part 1 Elementary Theory and Problems 3<sup>rd</sup> Ed.”, Van Nostrand Reinhold Company, New York
- Timoshenko, S.P. , Goodier, J.N. dan Darwin Sebayang (penerjemah) . (1994). “Teori Elastisitas Edisi ke-3”, Penerbit Erlangga, Jakarta



*Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.*

Literatur pertama menurut penulis lebih mudah dipahami dan lengkap, sedangkan literatur terakhir paling teoritis matematis dan relatif susah. Oleh karena itu buku Boresi-Schmidt (2003) banyak digunakan sebagai acuan utama dalam menyelesaikan soal tentang balok lengkung ini.

Dalam menggunakan teori balok lengkung ada dua perbedaan pokok dibandingkan dengan teori balok lurus, yaitu :

- Distribusi tegangan lentur pada balok lengkung bersifat non-linier, oleh karena itu akibat momen lentur murni letak garis netralnya (neutral axis) tidak terletak pada garis yang sama dengan garis berat potongan (*centroidal axis*).
- Momen lentur pada penampang balok lengkung menghasilkan tegangan radial dan perlu diperhatikan khususnya pada penampang dengan lebar yang tipis dan untuk material yang mempunyai kekuatan yang rendah pada arah radial, misal : kayu atau komposit satu arah.

Penyelesaian eksak untuk balok lengkung dengan penampang persegi atau lingkaran pejal dapat dilakukan dengan teori elastisitas (Timoshenko et.al 1994) , untuk penampang lain diperlukan pendekatan (Boresi-Schmidt 2003).

Asumsi untuk menurunkan rumus pendekatan adalah:

- Material bersifat homogen, isotropik dan elastis linier.
- Ditinjau dari bentuk geometrinya, kelengkungan balok berupa lingkaran (meskipun tidak mesti tertutup / lingkaran penuh). Sumbu balok, garis tepi dalam atau luar dari balok lengkung harus membentuk jari-jari yang terletak pada sumbu lingkaran yang sama. Sumbu balok terletak pada bidang dan bukan berupa heliks atau koil pegas. Penampang balok sama (uniform) sepanjang lingkaran (balok lengkung prismatis)
- Penampang balok harus terletak pada bidang yang sama, sebelum dan sesudah pembebanan
- Penampang harus mempunyai sumbu simetri sebagai pusat bidang lingkaran.
- Beban terletak pada bidang simetri tersebut.
- Tegangan radial ,  $\sigma_r$  dan geser ,  $\sigma_{r\theta}$  dianggap cukup kecil sehingga kondisi tegangan dapat dianggap kondisi tegangan satu dimensi.

Untuk pembahasan, ditinjau balok lengkung yang penampangnya mempunyai bidang simetri dan koordinat polar ( $r, \theta$ ) yang terletak pada bidang tsb. Titik 0 adalah pusat kelengkungannya.

Momen positif adalah momen yang menyebabkan radius kelengkungan balok bertambah besar, dan itu berlaku pada gaya-gaya dan momen yang ditunjukkan Gambar 2.2a

Distribusi tegangan sirkumferensial pada balok lengkung mengikuti formulasi

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{N}{A} + \frac{M_x (A - rA_m)}{Ar(RA_m - A)} \dots\dots\dots (2.1)$$

Dimana

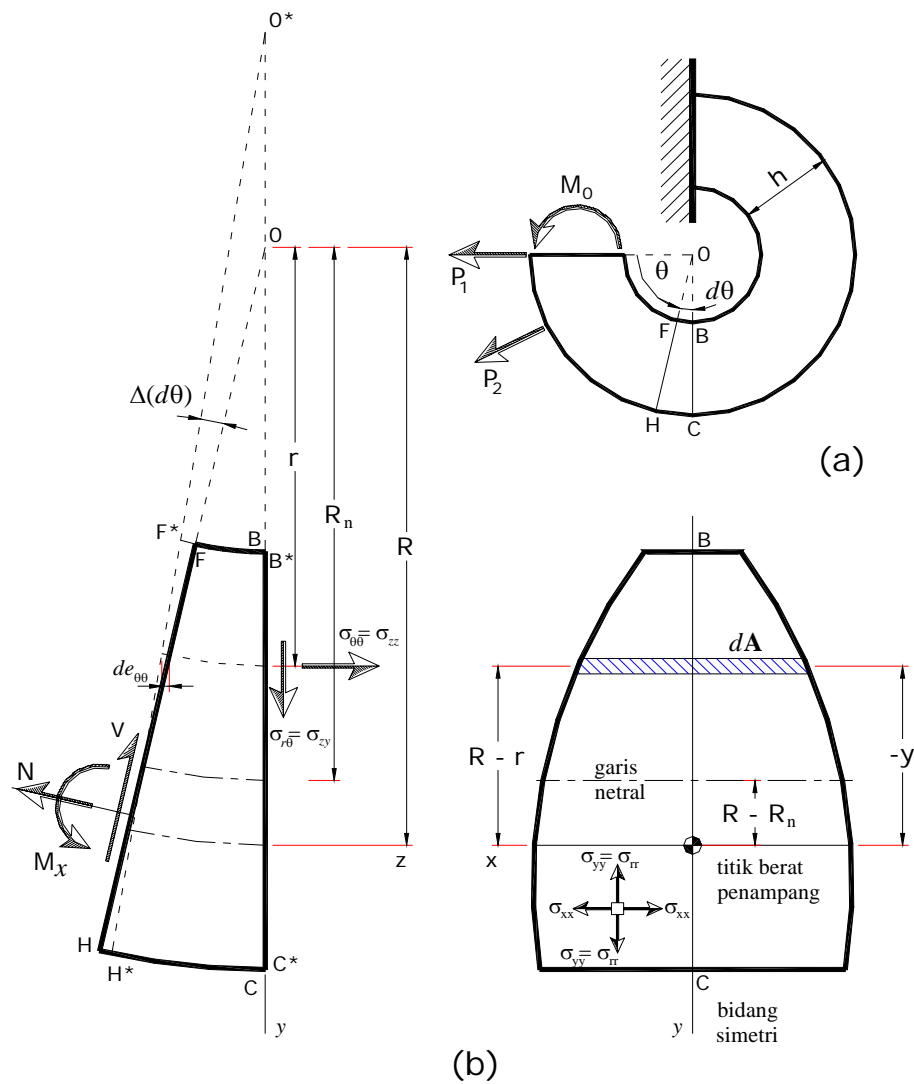
A luas penampang balok lengkung

$A_m$  dimensi dalam satuan panjang , yaitu  $A_m = \int \frac{dA}{r}$  (lihat Tabel 2.1)

r posisi  $dA$  terhadap titik pusat kelengkungan (lihat Gambar 2.2 dan 2.3)

R kelengkungan balok (lihat Gambar 2.2)

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

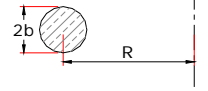
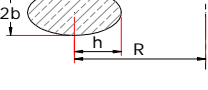


Gambar 2.2 Tegangan pada Balok Lengkung

Tabel 2. 1 Rumus A ;  $A_m$  dan R untuk berbagai penampang (Boresi-Schmidt 2003)

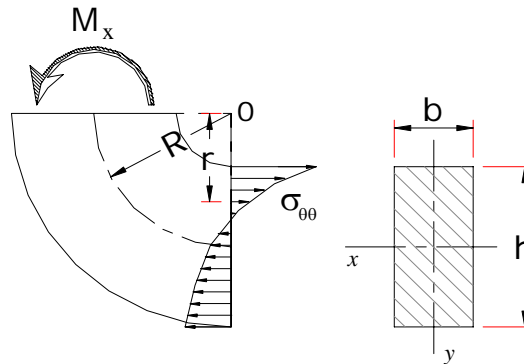
	$A = b(c - a) ; R = \frac{a + c}{2}$ $A_m = b \ln \frac{c}{a}$
	$A = \frac{b}{2}(c - a) ; R = \frac{2a + c}{3}$ $A_m = \frac{bc}{c - a} \ln \frac{c}{a} - b$
	$A = \frac{b_1 + b_2}{2}(c - a) ; R = \frac{a(2b_1 + b_2) + c(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)}$ $A_m = \frac{b_1 c - b_2}{c - a} \ln \frac{c}{a} - b_1 + b_2$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

	$A = \pi b^2$ $A_m = 2\pi \left( R - \sqrt{R^2 - b^2} \right)$
	$A = \pi b h$ $A_m = \frac{2\pi b}{h} \left( R - \sqrt{R^2 - h^2} \right)$

Adanya tabulasi parameter A ;  $A_m$  dan R untuk berbagai bentuk penampang balok lengkung kiranya dapat menjawab pertanyaan tentang apakah penyelesaian yang dibahas ini juga berlaku untuk penampang bukan persegi, yaitu bahwa formulasi menggunakan Pers.(2.1) dapat digunakan untuk beberapa bentuk penampang selain persegi. Tetapi untuk penampang dengan dinding tipis seperti profil I, T atau yang sejenis formulasi di atas tidak bisa karena formulasi tersebut mengabaikan pengaruh tegangan radial  $\sigma_{rr}$ , dan geser  $\sigma_{r\theta}$ .

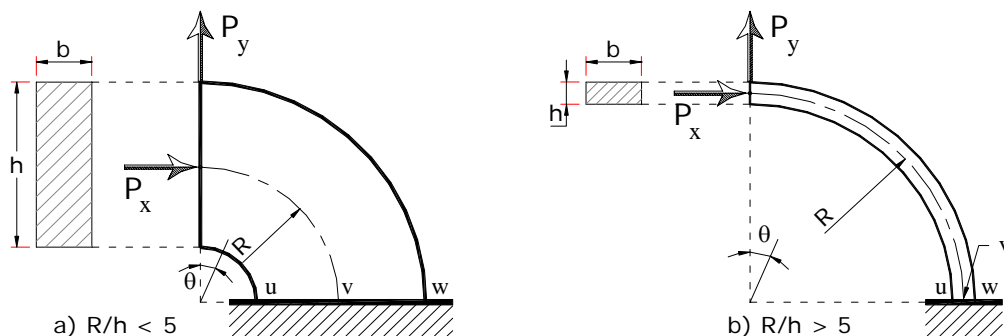
Distribusi tegangan normal pada Pers.(2.1) berbentuk hiperbolik dan bervariasi terhadap  $1/r$ , utk balok lengkung dengan penampang persegi dengan perbandingan kelengkungan  $R/h = 0.75$  yang dibebani lentur murni distribusinya diperlihatkan pada gambar berikut.



Gambar 2. 3 Distribusi tegangan sirkumferensial pada balok lengkung

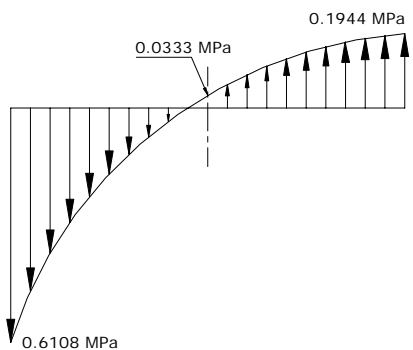
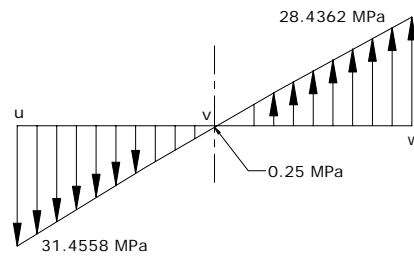
**Contoh Penyelesaian Analisis Tegangan pada Balok Lengkung**

Agar mendapatkan pemahaman yang baik dalam pemakaian rumus balok lengkung menurut persamaan (2.1) maka akan ditinjau dua kondisi balok lengkung yang konfigurasi sama tetapi beda parameter sedemikian sehingga rasio  $R/h$  berbeda. Konfigurasi a)  $R/h < 5$  dan konfigurasi b)  $R/h > 5$ , selanjutnya hasilnya dibandingkan dengan pemakaian rumus tegangan pada balok lurus. Adapun titik yang ditinjau tegangannya adalah pada pangkal balok.



Gambar 2. 4 Konfigurasi Balok Lengkung dengan  $R/h$  berbeda

Penyelesaian dengan formulasi Balok Lengkung

Konfigurasi a : R/n = 0.83333	Konfigurasi b : R/n = 10
<p> <math>P_x=P_y= 1000 \text{ N}</math>  <math>b = 100 \text{ mm}</math>  <math>h = 300 \text{ mm}</math>  <math>R = 250 \text{ mm}</math>  <math>R/h = 0.83333</math>  <math>a = R - h/2 = 100 \text{ mm}</math>  <math>c = R + h/2 = 400 \text{ mm}</math>  <math>A = bh = 30000 \text{ mm}^2</math>  <math>A_m = 100 \ln(400/100) = 138.63 \text{ mm}</math>                      Gaya dan momen di v (tumpuan balok)  <math>M = 500000 \text{ Nmm} = 0.5 \text{ kNm}</math> (↻) positip  <math>N = 1000 \text{ N} = 1 \text{ kN}</math> (↑)  <math>V = 1000 \text{ N} = 1 \text{ kN}</math> (⇨)                      Hitungan tegangan sirkumferensial                      di titik u → r = a = 100 mm  <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = \frac{1E3}{3E4} + \frac{0.5E6*(3E4 - 100*138.63)}{3E4*100(250*138.63 - 3E4)}</math> <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = 0.03333 + 0.57745 = 0.6108 \text{ MPa}</math>                      di titik v → r = R = 250 mm  <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = \frac{1E3}{3E4} + \frac{0.5E6*(3E4 - 250*138.63)}{3E4*250(250*138.63 - 3E4)}</math> <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = 0.03333 - 0.06666 = -0.0333367 \text{ MPa}</math>                      di titik w → r = c = 400 mm  <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = \frac{1E3}{3E4} + \frac{0.5E6*(3E4 - 400*138.63)}{3E4*400(250*138.63 - 3E4)}</math> <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = 0.03333 - 0.227697 = -0.194367 \text{ MPa}</math> </p>	<p> <math>P_x=P_y= 1000 \text{ N}</math>  <math>b = 100 \text{ mm}</math>  <math>h = 40 \text{ mm}</math>  <math>R = 400 \text{ mm}</math>  <math>R/h = 10</math>  <math>a = R - h/2 = 380 \text{ mm}</math>  <math>c = R + h/2 = 420 \text{ mm}</math>  <math>A = bh = 4000 \text{ mm}^2</math>  <math>A_m = 100 \ln(420/380) = 10.0083 \text{ mm}</math>                      Gaya dan momen di v (tumpuan balok)  <math>M = 800000 \text{ Nmm} = 0.8 \text{ kNm}</math> (↻) positip  <math>N = 1000 \text{ N} = 1 \text{ kN}</math> (↑)  <math>V = 1000 \text{ N} = 1 \text{ kN}</math> (⇨)                      Hitungan tegangan sirkumferensial                      di titik u → r = a = 380 mm  <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = \frac{1E3}{4E3} + \frac{0.8E6*(4E3 - 380*10.0083)}{4E3*380(400*10.0083 - 4E3)}</math> <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = 0.25 + 31.2058 = 31.4558 \text{ MPa}</math>                      di titik v → r = R = 400 mm  <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = \frac{1E3}{4E3} + \frac{0.8E6*(4E3 - 400*10)}{3E4*400(400*10.0083 - 4E3)}</math> <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = 0.25 + 0 = 0.25 \text{ MPa}</math>                      di titik w → r = c = 420 mm  <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = \frac{1E3}{4E3} + \frac{0.8E6*(4E3 - 420*10)}{4E3*420(400*10.0083 - 4E3)}</math> <math display="block">\sigma_{\theta\theta} = 0.25 - 28.6862 = -28.4362 \text{ MPa}</math> </p>
<p>Distribusi tegangan sirkumferensial</p>  <p>distribusi nonlinier (skala proporsional)</p>	<p>Distribusi tegangan sirkumferensial</p>  <p>distribusi linier (skala proporsional)</p>

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

Penyelesaian dengan formulasi Balok Lurus

Konfigurasi a :	Konfigurasi b :
P = 1000 N ; b = 100 mm ; h = 300 mm R = 250 mm ; A = bh = 30000 mm <sup>2</sup> I <sub>x</sub> = 1/12*100*300 <sup>3</sup> = 225E+6 mm <sup>4</sup> Gaya dan momen di v (tumpuan balok) M = 500000 Nmm = 0.5 kNm (↺) positip N = 1000 N = 1 kN (↑) V = 1000 N = 1 kN (⇨)	P = 1000 N ; b = 100 mm ; h = 40 mm R = 400 mm ; A = bh = 4000 mm <sup>2</sup> I <sub>x</sub> = 1/12*100*40 <sup>3</sup> = 533333.33333 mm <sup>4</sup> Gaya dan momen di v (tumpuan balok) M = 800000 Nmm = 0.8 kNm (↺) positip N = 1000 N = 1 kN (↑) V = 1000 N = 1 kN (⇨)
Hitungan tegangan sirkumferensial di titik u → y = 0.5h = 150 mm $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} = \frac{1E3}{3E4} + \frac{0.5E6*150}{225E6}$ σ = 0.03333 + 0.33333 = 0.36666 MPa	Hitungan tegangan sirkumferensial di titik u → y = 0.5h = 20 mm $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} = \frac{1E3}{4E3} + \frac{0.8E6*20}{533333.33333}$ σ = 0.25 + 30 = 30.25 MPa
di titik v → y = 0 mm sehingga σ = 0.03333 + 0 = 0.03333 MPa	di titik v → y = 0 mm σ = 0.25 + 0 = 0.25 MPa
di titik w → y = 0.5h = 150 mm $\sigma = \frac{N}{A} - \frac{My}{I} = \frac{1E3}{3E4} - \frac{0.5E6*150}{225E6}$ σ = 0.03333 - 0.33333 = -0.3 MPa	di titik w → y = 0.5h = 20 mm $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} = \frac{1E3}{4E3} - \frac{0.8E6*20}{533333.33333}$ σ = 0.25 - 30 = -29.75 MPa

Perbandingan antara formulasi balok lengkung dan lurus

Konfigurasi Balok lengkung	Titik	Tegangan sirkumferensial (MPa)		Perbedaan % thd lengkung
		Teori Balok Lengkung	Teori Balok Lurus	
A (R/h=0.8333)	u	0.61080	0.36666	60%
	v	0.03333	0.03333	0%
	w	-0.19440	-0.30000	154%
B (R/h=10)	u	31.45580	30.25000	96%
	v	0.25000	0.25000	0%
	w	-28.43620	-29.75000	105%

Jadi dengan contoh penyelesaian numerik ini, dapat dibuktikan bahwa rasio R/h pada ‘balok lengkung’ menentukan apakah perhitungan tegangan pada penampang tersebut dapat memakai rumusan balok biasa atau formulasi khusus ‘balok lengkung’.

Balok lengkung dengan R/h kecil (< 5) harus memakai formula ‘balok lengkung’ karena jika dihitung dengan formula balok lurus hasilnya memberi error yang cukup besar (Boresi-Schmidt 2003), sedangkan untuk R/h yang relatif besar maka perhitungan balok lengkung dengan rumus-rumus balok biasa (lurus) relatif cukup teliti karena kesalahan hasilnya yang relatif kecil.

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

**Lendutan pada Balok Lengkung**

Lendutan atau rotasi pada balok lengkung dapat dihitung dengan teorema Castigliano. Untuk balok lengkung dengan satu ujung terjepit dan lainnya bebas seperti pada soal 2, dapat dicari dengan hubungan:

$$\text{Perpindahan translasi } \delta_{P_1} = \frac{\partial U}{\partial P_1} \dots\dots\dots (2.2)$$

dan

$$\text{Perpindahan rotasi } \phi = \frac{\partial U}{\partial M_0} \dots\dots\dots (2.3)$$

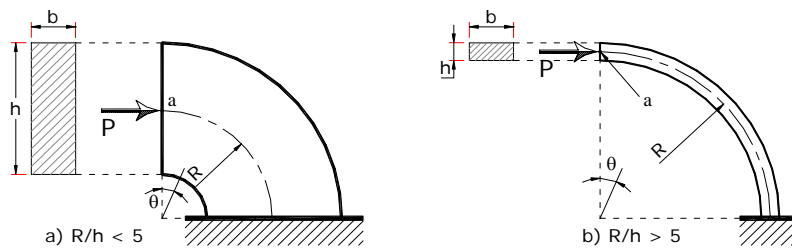
Sedangkan total energi regangan U untuk balok lengkung diperoleh dalam bentuk

$$U = U_S + U_N + U_M + U_{MN}$$

atau

$$U = \int \frac{kV^2 R}{2GA} d\theta + \int \frac{N^2 R}{2EA} d\theta + \int \frac{A_m M_x^2}{2A(RA_m - A)E} d\theta - \int \frac{M_x N}{EA} d\theta \dots\dots\dots (2.4)$$

Perlu dicatat bahwa persamaan (2.4) merupakan pendekatan berdasarkan asumsi-asumsi yang sama yang digunakan pada perhitungan tegangan, yaitu potongan tetap terletak pada bidang baik sebelum dan sesudah dibebani, serta pengaruh tegangan radial diabaikan.



**Gambar 2.5 Contoh Kasus : Perhitungan Lendutan**

**Analisis Lendutan pada Balok Lengkung (contoh penyelesaian)**

Untuk mendapatkan gambaran lengkap tentang analisis lendutan pada balok lengkung maka dilakukan perhitungan untuk balok lengkung dengan konfigurasi di atas.

Penyelesaian dengan formulasi Balok Lengkung

Konfigurasi a : R/n = 0.83333	Konfigurasi b : R/n = 10
P = 1000 N	P = 1000 N
b = 100 mm	b = 100 mm
h = 300 mm	h = 40 mm
R = 250 mm	R = 400 mm
R/h = 0.83333	R/h = 10
a = R - h/2 = 100 mm	a = R - h/2 = 380 mm
c = R + h/2 = 400 mm	c = R + h/2 = 420 mm
A = bh = 30000 mm <sup>2</sup>	A = bh = 4000 mm <sup>2</sup>
A <sub>m</sub> = 100 ln(400/100) = 138.63 mm	A <sub>m</sub> = 100 ln(420/380) = 10.0083 mm
V = P sin θ	V = P sin θ
N = P cos θ	N = P cos θ
M = PR cos θ	M = PR cos θ

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr. Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

<p>(<math>\theta = 0</math> untuk ujung bebas balok )</p> <p>Diambil  <math>E = 2 \cdot 10^5</math> MPa    <math>\nu = 0.3</math>  <math>G = E / [2(1 + \nu)] \approx 80000</math> MPa  <math>k = 1.2</math> (faktor bentuk penampang)</p> $U_S = \int \frac{kV^2 R}{2GA} d\theta = \int \frac{1.2P^2 \sin^2 \theta}{2GA} R d\theta$ $U_S = \frac{0.6P^2 R}{GA} \left( \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right) = \frac{0.15\pi P^2 R}{GA}$ $\delta_S = \frac{\partial U_S}{\partial P} = \frac{0.3\pi PR}{GA}$ $= \frac{0.3 * \pi * 1E3 * 250}{8E4 * 3E4} = 9.82E - 5 \text{ mm}$ $U_N = \int \frac{N^2 R}{2AE} d\theta$ $U_N = \frac{P^2 R}{2EA} \left( \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right) = \frac{\pi P^2 R}{8EA}$ $\delta_N = \frac{\partial U_N}{\partial P} = \frac{\pi PR}{4EA}$ $= \frac{\pi * 1E3 * 250}{4 * 2E5 * 3E4} = 3.272E - 5 \text{ mm}$ $U_M = \int \frac{A_m M_x^2}{2A(RA_m - A)E} d\theta$ $U_M = \frac{A_m P^2 R^2}{2A(RA_m - A)E} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$ $= \frac{A_m \pi P^2 R^2}{8A(RA_m - A)E}$ $\delta_M = \frac{\partial U_M}{\partial P} = \frac{A_m \pi PR^2}{4A(RA_m - A)E}$ $= \frac{138.63 \pi * 1E3 * 250^2}{4 * 3E4(250 * 138.63 - 3E4) * 2E5}$ $= 2.435E - 4 \text{ mm}$	<p>(<math>\theta = 0</math> untuk ujung bebas balok )</p> <p>Diambil  <math>E = 2 \cdot 10^5</math> MPa    <math>\nu = 0.3</math>  <math>G = E / [2(1 + \nu)] \approx 80000</math> MPa  <math>k = 1.2</math></p> <p>berdasarkan formulasi yang sudah berhasil diturunkan di tabulasi sebelah maka dapat dihitung</p> $\delta_S = \frac{\partial U_S}{\partial P} = \frac{0.3\pi PR}{GA}$ $= \frac{0.3 * \pi * 1E3 * 400}{8E4 * 4E3} = 1.178E - 3 \text{ mm}$ $\delta_N = \frac{\partial U_N}{\partial P} = \frac{\pi PR}{4EA}$ $= \frac{\pi * 1E3 * 400}{4 * 2E5 * 4E3} = 3.927E - 4 \text{ mm}$ $\delta_M = \frac{\partial U_M}{\partial P} = \frac{A_m \pi PR^2}{4A(RA_m - A)E}$ $= \frac{10.0083 \pi * 1E3 * 400^2}{4 * 4E3(400 * 10.0083 - 4E3) * 2E5}$ $= 0.474 \text{ mm}$ $\delta_{MN} = - \frac{\partial U_{MN}}{\partial P} = - \frac{\pi PR}{2EA}$ $= - \frac{\pi * 1E3 * 400}{2 * 2E5 * 4E3} = -2.5E - 4 \text{ mm}$ <p>Jadi translasi <math>\Rightarrow</math> di titik a adalah</p> $\delta_a = \delta_S + \delta_N + \delta_M - \delta_{MN}$ $\delta_a = (11.78 + 3.927 + 4740 - 2.5) * 10^{-4} \text{ mm}$ $\delta_a = 4753 * 10^{-4} \text{ mm } (\Rightarrow)$ <p>atau</p> $\delta_a = 0.4753 \text{ mm } (\Rightarrow)$
--	---

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

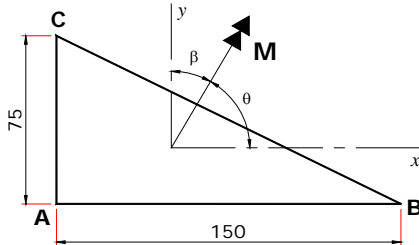
$U_{MN} = -\int \frac{M_x N}{EA} d\theta$ $U_{MN} = -\int \frac{PR \cos \theta \cdot P \cos \theta}{EA} d\theta$ $U_{MN} = -\frac{P^2 R}{EA} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = -\frac{\pi P^2 R}{4EA}$ $\delta_{MN} = -\frac{\partial U_{MN}}{\partial P} = -\frac{\pi PR}{2EA}$ $= -\frac{\pi * 1E3 * 250}{2 * 2E5 * 3E4}$ $= -6.54E - 5 \text{ mm}$ <p>Jadi translasi <math>\Rightarrow</math> di titik a adalah</p> $\delta_a = \delta_s + \delta_N + \delta_M - \delta_{MN}$ $\delta_a = (9.82 + 3.27 + 24.35 - 6.54) * 10^{-5} \text{ mm}$ $\delta_a = 30.9 * 10^{-5} \text{ mm } (\Rightarrow)$	<p>Komentar :</p> <p>Dengan memisah-misahkan komponen penyebab lendutan maka terlihat sekali bahwa Balok lengkung dengan R/n yang besar (lansing), lendutannya ditentukan sepenuhnya dari kekakuan lentur yaitu sekitar 99.7% dari nilai lendutan yang terjadi.</p> <p>Sedangkan balok lengkung dengan R/n yang kecil (gemuk) maka prosentasi kekakuan lentur relatif kecil karena hanya menyumbang sebesar 79% dari nilai lendutan yang terjadi. Jadi ada komponen lain yang perlu diperhatikan, misal deformasi geser, momen.</p>
--	---



Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

**Soal 3.**

Sebuah balok dengan penampang berbentuk segitiga mengalami momen lentur M yang vektornya membentuk sudut β terhadap sumbu y (catatan: diambil sebagai sumbu vertikal karena pada soal tidak tergambar jelas).



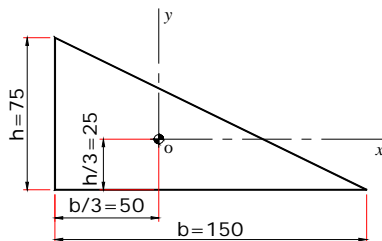
Pertanyaan:

Bila sudut β = 30° dan M = 6 kNm , berapakah tegangan lentur di A, B dan C, selain itu tentukan juga garis netral.

Berapakah sudut β agar garis netral sejajar dengan AC.

**Jawaban**

Properti penampang sesuai Tabel B1 (Boresi-Schmidt 2003)



$$I_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{150 \cdot 75^3}{36} = 1,757,812.5 \text{ mm}^4$$

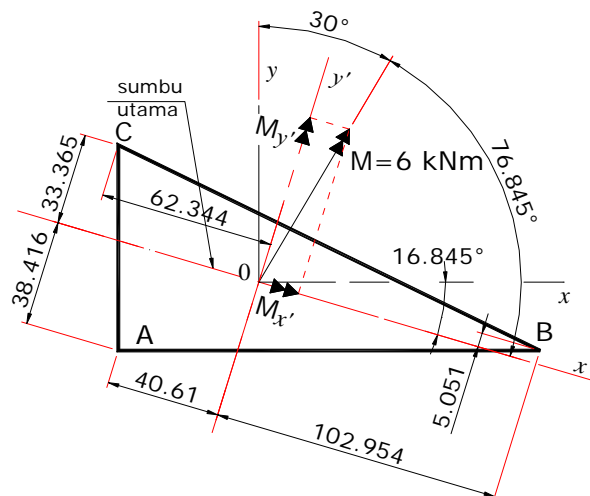
$$I_y = \frac{b^3h}{36} = \frac{150^3 \cdot 75}{36} = 7,031,250.0 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72} = -\frac{150^2 \cdot 75^2}{72} = -1,757,812.5 \text{ mm}^4$$

Penampang segi-tiga di atas termasuk kategori sebagai penampang tanpa sumbu simetri maka terhadap pembebanan momen murni , bidang dimana momen bekerja adalah tegak lurus bidang netral hanya jika sumbu x dan y terletak pada sumbu utama penampang. Selanjutnya momen yang bekerja pada bidang utama akan berperilaku sebagai balok biasa (dengan sumbu simetri).

Oleh karena itu langkah ke-2 setelah mendapatkan properti penampang adalah mencari sumbu utama dari penampang segi tiga tersebut.

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot (-1,757,812.5)}{1,757,812.5 - 7,031,250} = -0.6666667 \rightarrow \theta_p = -16.845^\circ$$



Gambar 3. 1 Orientasi Sumbu Utama pada Penampang Segitiga

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr. Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

Transformasi properti momen intersia terhadap sumbu utama

$$\tan 2\theta_p = -0.6666667 \rightarrow 2\theta_p = -33.69^\circ$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'} = \frac{1,757,812.5 + 7,031,250}{2} + \frac{1,757,812.5 - 7,031,250}{2} \cos -33.69^\circ - (-)1,757,812.5 \sin -33.69^\circ$$

$$I_{x'} = 4,394,531.25 - 2,193,884.336 - 975,057.215$$

$$I_{x'} = 1,225,589.7 \text{ mm}^2$$

Check sudut sumbu utama

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{1,757,812.5 - 7,031,250}{2} \sin -33.69^\circ + (-)1,757,812.5 \cos -33.69^\circ$$

$$I_{x'y'} = 1462585.822 - 1462589.557 = -3.735 \text{ dpt dianggap } \approx 0 \text{ akibat kesalahan pembulatan,}$$

karena dibanding dengan nilai sebelumnya (thd sumbu x biasa) adalah -0.0002%..

Selanjutnya digunakan cara lain untuk mencari inersia pada sumbu utama yaitu

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

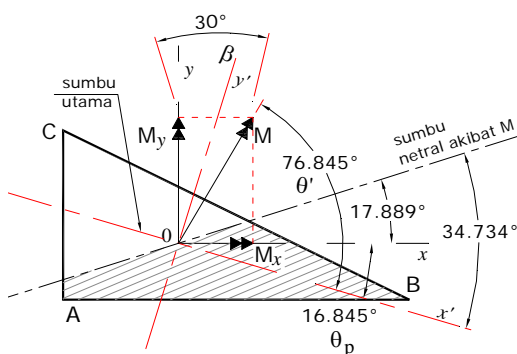
$$I_1 = \frac{1757812.5 + 7031250}{2} + \sqrt{\left(\frac{1757812.5 - 7031250}{2}\right)^2 + (-1757812.5)^2}$$

$$I_1 = 4,394,531.25 + 3,168,941.551 = 7,563,472.8 \text{ mm}^4 \rightarrow I_{y'}$$

$$I_2 = 4,394,531.25 - 3,168,941.551 = 1,225,589.7 \text{ mm}^4 \rightarrow I_{x'} \text{ (sama dengan hasil sebelumnya)}$$

### a). Menghitung tegangan pada tiap titik dan mencari sudut garis netral

Momen  $M = 6 \text{ kNm}$  yang terletak pada sudut  $\beta = 30^\circ$  terhadap sumbu  $y$  (vertikal), tetapi karena penampang segitiga yang ditinjau tidak mempunyai sumbu simetri penampang maka untuk penguraian tegangan-tegangan perlu ditinjau terhadap sumbu utama.



$$\theta' = 90^\circ - \beta + \theta_p = 90 - 30 + 16.845$$

$$\theta' = 76.845^\circ$$

$$\text{Garis netral : } \tan \psi = \frac{I_{x'}}{I_{y'}} \tan \theta'$$

$$\tan \psi = \frac{1225589.7}{7563472} * \tan 76.845^\circ = 0.69331258$$

$$\rightarrow \psi = 34.734^\circ \text{ terhadap sb utama } x' \text{ atau}$$

$$17.889^\circ \text{ thd sb horizontal } x$$

Check garis netral melalui cara lain yaitu rumus dari Cook-Young 1999 halaman 316

Momen  $M$  diuraikan terhadap sumbu  $x$  horizontal dan  $y$  vertikal (lihat gambar) maka

$$M = 6 \text{ kNm}$$

Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

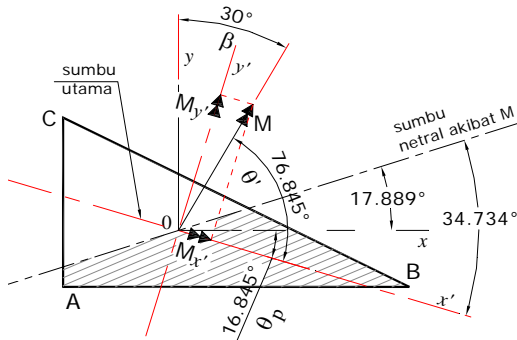
$$M_x = M \sin \beta = 6 * \sin 30^\circ = 3 \text{ kNm}$$

$$M_y = M \cos \beta = 6 * \cos 30^\circ = 5.196 \text{ kNm}$$

$$\tan \psi = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{M_x I_y + M_y I_{xy}} = \frac{6 \sin 30^\circ * (-)1757812.5 + 6 \cos 30^\circ * 1757812.5}{6 \sin 30^\circ * 7031250 + 6 \cos 30^\circ * (-)1757812.5} = 0.3227809$$

$\psi = 17.889^\circ$  terhadap sumbu horizontal x (hasilnya sama dengan yang terdahulu)

### Menghitung tegangan-tegangan akibat M



Terhadap sumbu utama  $x'$ , maka Momen  $M$  tersebut membentuk sudut sebesar  $76.845^\circ$  (lihat gambar), jika diuraikan terhadap terhadap sumbu utama diperoleh :

$$M = 6 \text{ kNm}$$

$$M_{x'} = M \cos 76.845^\circ = 1.3655 \text{ kNm}$$

$$M_{y'} = M \sin 76.845^\circ = 5.8425 \text{ kNm}$$

### Tegangan di titik A

Jarak terhadap sumbu-sumbu utama (lihat Gambar 3.1)

$$x' = -40.61 \text{ mm} ; y' = -38.416 \text{ mm} \quad I_{x'} = 1,225,589.7 \text{ mm}^2 ; I_{y'} = 7,563,472.8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_z = \frac{M_{y'} * x'}{I_{y'}} - \frac{M_{x'} * y'}{I_{x'}} = \frac{5.8425E6 * 40.61}{7563472.8} - \frac{1.3655E6 * 38.416}{1225589.7} = 31.37 - 42.80 = -11.43 \text{ MPa}$$

### Tegangan di titik B

$$x' = 102.954 \text{ mm} ; y' = 5.051 \text{ mm} \quad ; I_{x'} = 1,225,589.7 \text{ mm}^2 ; I_{y'} = 7,563,472.8 \text{ mm}^4$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{M_{y'} * x'}{I_{y'}} + \frac{M_{x'} * y'}{I_{x'}} = -\frac{5.8425E6 * 102.954}{7563472.8} + \frac{1.3655E6 * 5.051}{1225589.7} \\ &= -79.53 + 5.63 = -73.90 \text{ MPa} \end{aligned}$$

### Tegangan di titik C

$$x' = -62.344 \text{ mm} ; y' = 33.365 \text{ mm} \quad ; I_{x'} = 1,225,589.7 \text{ mm}^2 ; I_{y'} = 7,563,472.8 \text{ mm}^4$$

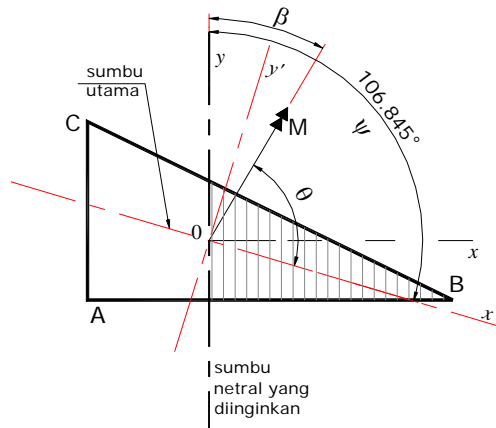
Jawaban untuk Pertanyaan Tertulis Dr.Ir. Paulus Kartawijaya, MT.

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{M_{y'} * x'}{I_{y'}} + \frac{M_x * y'}{I_{x'}} = \frac{5.8425E6 * 62.344}{7563472.8} + \frac{1.3655E6 * 33.365}{1225589.7} \\ &= 48.16 + 37.14 = 85.33 \text{ MPa} \end{aligned}$$

**b). Mencari sudut M agar garis netral sejajar AC**

garis sejajar AC jika sudutnya 90° dari sumbu horizontal mencari garis netral dapat dicari dengan rumus berikut

$\tan \psi = \frac{I_{x'}}{I_{y'}} * \tan \theta$  untuk parameter yang digunakan lihat gambar di bawah

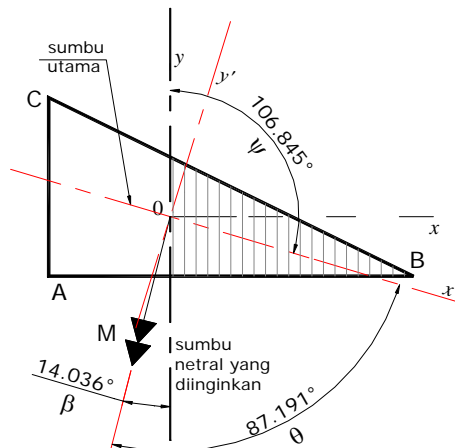


**Gambar 3. 2 Mencari θ agar sb. Netral Vertikal**

$$I_{x'} = 1,225,589.7 \text{ mm}^2 ; I_{y'} = 7,563,472.8 \text{ mm}^4$$

$$\tan \theta = \tan \psi \frac{I_{y'}}{I_{x'}} = \tan 106.845^\circ * \frac{7563472.8}{1225589.7} = -20.382 \rightarrow \theta = -87.191^\circ$$

Jadi agar dihasilkan bidang netral sejajar garis AC maka momen M harus diorientasikan sbb.



**Gambar 3. 3 Orientasi M pada sudut β = 14.036° agar Sb. Netral vertikal**