

Simulasi Keruntuhan Balok Beton Bertulang Tanpa Sengkang Dengan ADINA™

Wiryanto Dewobroto¹

Abstrak

Test beban sampai runtuh diperlukan untuk menguji keandalan struktur, yaitu dengan mengetahui beban maksimum yang dapat dipikul. Test dilakukan di laboratorium dan relatif mahal. Saat ini perkembangan komputer rekayasa sangat pesat dan semakin terjangkau, termasuk perangkat lunak berbasis m.e.h komersil yang dapat melakukan simulasi test beban tersebut, salah satunya adalah ADINA (2003). Simulasi keruntuhan struktur beton bertulang merupakan analisa non-linier karena perilaku keruntuhan bersifat sangat kompleks. Agar simulasi mirip dengan kondisi nyata maka perlu pemahaman yang benar mengenai program komputer, input data maupun interpretasi hasilnya. Parameter material yang digunakan sebagai input data sebaiknya dari hasil pengukuran laboratorium, apabila tidak maka diperlukan korelasi dengan data-data empiris yang standar. Selanjutnya untuk mendapatkan kesimpulan apakah hasilnya benar atau tidak, diperlukan perbandingan yang dipercaya, yang tidak lain adalah hasil test beban eksperimental sesungguhnya. Hasil test beban balok beton terbaru di Universitas Toronto (Vecchio-Shim, 2004), akan dipakai dalam penelitian ini. Hasil studi menunjukkan bahwa beban runtuh balok tidak serta merta diperoleh, perlu dibuat kurva beban-lendutan untuk mengidentifikasi keruntuhan balok terlebih dahulu. Selain itu input data dari rumus empiris perlu dimodifikasi agar hasilnya sama dengan eksperimen. Secara umum dapat dibuktikan bahwa program ADINA dapat digunakan untuk simulasi keruntuhan balok beton bertulang secara baik.

Kata kunci : simulasi keruntuhan, beban ultimate, non-linier

1 Pendahuluan

Struktur beton bertulang didesain untuk memenuhi kriteria keamanan (*safety*) dan layak-pakai (*serviceability*). Untuk memenuhi kriteria layak-pakai maka besarnya retak dan lendutan struktur pada kondisi beban kerja harus dapat diestimasi dan memenuhi kriteria tertentu. Sedangkan untuk memenuhi kriteria keamanan maka struktur harus didesain mempunyai suatu angka keamanan terhadap beban runtuh, karena itu perkiraan besarnya beban runtuh (batas) sangat penting. Selain nilai absolut beban yang menyebabkan keruntuhan, maka perilaku struktur saat runtuh juga perlu diketahui, apakah bersifat daktail (mengalami deformasi besar sebelum runtuh), atau tiba-tiba (non-daktail).

Untuk mengetahui beban batas dan perilaku struktur yang dibebani maka uji eksperimental menjadi alat utama untuk mengevaluasi keandalan metode analitis yang digunakan. Dalam perkembangannya, uji simulasi komputer dengan m.e.h dapat mengurangi jumlah materi uji yang harus dilakukan dalam uji eksperimental, sehingga biayanya dapat dikurangi. Salah satu program komputer komersil yang menyediakan fasilitas simulasi tersebut adalah ADINA (2003) yang dibuat oleh prof. K.J Bathe dari USA (www.adina.com).

Simulasi keruntuhan struktur bukanlah prosedur yang biasa, yang dapat secara rutin dipergunakan dalam perencanaan sehari-hari. Hal tersebut berkaitan dengan masalah-masalah non-linier, setiap strategi penyelesaian dapat menghasilkan penyelesaian yang berbeda. Adapun kerumitan simulasi berbasis komputer untuk keruntuhan struktur beton bertulang berkaitan dengan faktor-faktor berikut :

- Beton bertulang adalah material komposit yang terdiri dari beton dan baja, kedua material tersebut mempunyai perilaku fisik dan mekanik yang sangat berbeda.

¹ Jurusan Teknik Sipil, Universitas Pelita Harapan, Lippo-Karawaci

- Beton sudah memperlihatkan perilaku nonlinier meskipun diberi beban kecil karena perilaku materialnya memang bersifat non-linier.
- Tulangan baja dan beton berinteraksi secara kompleks melalui mekanisme *bond-slip* dan *aggregate interlock*.

Karena kondisi seperti itulah mengapa banyak cara analitis manual struktur beton mengandalkan hasil pendekatan empiris dibanding cara perencanaan yang rasional. Pada era modern seperti saat ini, dimana komputer menjadi sesuatu yang umum maka suatu penyelesaian yang dahulu tidak bisa dilakukan secara manual dapat mudah dikerjakan dengan komputer yang didukung oleh m.e.h. Berbagai problem non-linier dapat dengan mudah disimulasi secara numerik dan diselesaikan dengan bantuan komputer untuk memperoleh hasil yang sebelumnya hanya dapat diperoleh dari uji eksperimen.

Setiap data akan menghasilkan keluaran, antara data satu dengan yang lain kadang-kadang sulit dibedakan karena semuanya berupa angka-angka numerik. Untuk membedakan pengaruh data satu dengan yang data yang lain maka pemahaman tentang latar belakang teori yang digunakan dalam penyusunan program harus dikuasai, demikian juga dengan keluaran yang dihasilkan. Apakah data yang dihasilkan sudah benar atau belum ?. Salah satu strategi penguasaan program komputer canggih tersebut adalah dengan melakukan uji *bench-mark*, yaitu melakukan analisis paralel suatu permasalahan yang sama tetapi dengan metoda yang berbeda. Bisa dilakukan dengan program komputer lain yang menggunakan formulasi berbeda, tetapi yang paling baik adalah membandingkan dengan data hasil eksperimental untuk kasus yang sama.

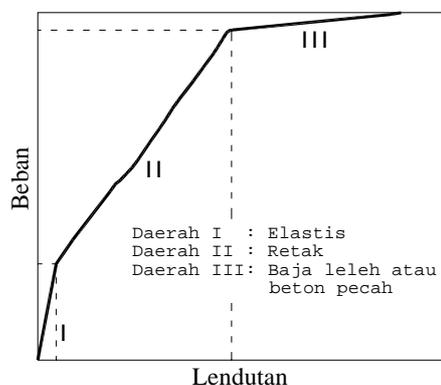
Data uji beban balok beton bertulang yang banyak dipakai sebagai rujukan adalah Bresler-Scordelis (1963) . Saat ini ada test eksperimen terbaru di Universitas Toronto memakai konfigurasi balok beton bertulang mirip dengan Bresler-Scordelis (Vecchio-Shim, 2004). Hasilnya akan digunakan sebagai *bench-mark* dalam penelitian ini.

2 Perilaku Keruntuhan Balok Beton Bertulang

Beton bertulang terdiri dari dua material, beton dan baja, yang sifatnya berbeda. Jika baja dianggap sebagai material homogen yang propertinya terdefinisi jelas maka sebaliknya dengan material beton , merupakan material heterogen dari semen, mortar dan agregat batuan, yang properti mekaniknya bervariasi dan tidak terdefinisi dengan pasti. Hanya untuk memudahkan dalam analisa saja maka umumnya dianggap sebagai material homogen dalam konteks makro.

Perilaku keruntuhan yang dominan pada struktur balok pada umumnya adalah lentur, tentu saja itu akan terjadi jika rasio bentang (L) dan tinggi balok (h) cukup besar. Jika rasio L/h kecil maka digolongkan sebagai balok tinggi (*deep beam*), keruntuhan geser dominan.

Apabila perilaku keruntuhan balok beton bertulang diatas dua tumpuan dapat digambarkan dalam bentuk kurva beban-lendutan , maka bentuk kurva tersebut adalah sebagai berikut :



Gambar 1. Perilaku Beban-Lendutan Struktur Beton

Hubungan serupa juga diperlihatkan pada struktur beton bertulang jenis lain khususnya yang didominasi perilaku lentur.

Perilaku keruntuhan dapat dibagi dalam tiga tahapan, yaitu : elastis penuh (belum retak), tahapan mulai terjadi retak-retak dan tahapan plastis (leleh pada baja atau beton pecah). Respons non-linier disebabkan dua hal utama yaitu : keretakan beton didaerah tarik dan tulangan mengalami leleh atau beton pecah (*crushing*) pada daerah desak. Selain itu juga disebabkan perilaku lain yang terkait, misalnya *bond-slip* antara tulangan baja dan beton disekitarnya, aksi penguncian agregat pada daerah retak dan akhirnya aksi ankur (*dowel action*) dari tulangan yang melintas disekitar retak. Perilaku sebagai fungsi waktu, misalnya *creep*, *shrinkage* dan variasi temperatur juga menyumbang perilaku non-linier. Kecuali itu, hubungan tegangan-regangan beton tidak hanya bersifat non-linier, tetapi juga berbeda antara beban tekan dan tarik, sifat mekaniknya tergantung dari umur waktu dibebani, kondisi lingkungan (suhu sekeliling dan kelembaban).

Untuk mencari beban ultimate maka kurva beban-lendutan digunakan untuk memprediksi yaitu pada bagian kurva yang mendekati horizontal. Dalam analisis numerik bagian itu merupakan daerah yang paling sulit karena kekakuannya yang mendekati nol, bahkan negatif dan menghasilkan penyelesaian singular untuk prosedur numerik biasa.

3 Data Uji Balok Eksperimen *Benchmark*

Suatu seri uji beban balok beton bertulang dari Universitas Toronto (Vecchio-Shim, 2004) yang konfigurasinya sama dengan uji eksperimen Bresler-Scordelis (1963) akan digunakan sebagai data uji *benchmark*. Hasil penelitian Toronto juga menampilkan sekaligus data hasil test eksperimen tahun 1963 dan 2004, sehingga menjadi pembandingan yang baik.

Konfigurasi balok Bresler-Scordelis dipilih Vecchio-Shim dengan alasan :

- Mempunyai dokumentasi yang lengkap dan berkualitas tinggi.
- Konfigurasi tersebut selama ini menunjukkan perilaku yang relatif sulit untuk simulasi dengan komputer. Banyak formulasi m.e.h yang diusulkan, gagal dalam memodelkan perilaku keruntuhan balok tersebut.

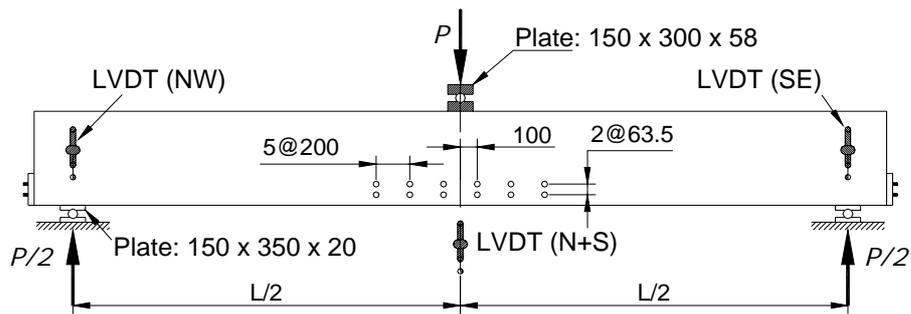
Balok yang diuji ada sebanyak 12 buah, beban uji diberikan secara monotonik memakai *Universal Testing Machine* berkapasitas 2700 kN yang dikontrol melalui servo motor. Beban diberikan di tengah bentang secara bertahap sebesar 40 kN, mendekati *ultimate* pembebanan dialihkan ke kontrol lendutan untuk merekam kondisi pasca runtuh. Balok-balok tersebut diuji tanpa pembebanan awal (*pre-load*) dan sifat pembebanan kontinyu.

Dari hasil uji eksperimen, ada tiga jenis keruntuhan yang dapat diidentifikasi yaitu :

1. *Diagonal-tension* (D-T) , keruntuhan tarik–diagonal sifatnya tiba-tiba setelah terbentuk retak diagonal yang kritis. Keruntuhan ini terjadi pada semua balok tanpa tulangan sengkang (balok OAi) dan umumnya dialami bersamaan dengan terjadinya split horizontal didaerah tekan dekat dengan daerah pembebanan.
2. *Shear-compression* (V-C), keruntuhan geser–tekan didominasi oleh balok dengan bentang menengah dan mempunyai tulangan sengkang.
3. *Flexure-compression* (F-C), keruntuhan lentur dan terjadi pada balok dengan bentang yang panjang dan ada sengkangnya.

Berdasarkan informasi yang ada, perilaku yang sulit untuk simulasi adalah keruntuhan balok tanpa sengkang, yaitu keruntuhan tarik-diagonal yang sifatnya tiba-tiba. Dari ke-12 balok uji Vecchio-Shim, ada 3 (tiga) balok tanpa sengkang, yaitu seri balok OAi.

Selanjutnya program m.e.h komersil ADINA yang mempunyai option pemodelan material beton akan diuji untuk simulasi seri balok OAi yang mempunyai detail sebagai berikut :

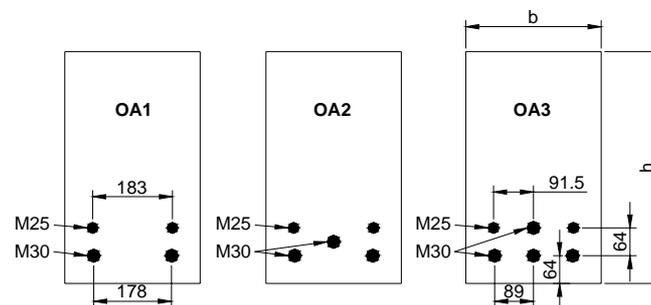


Gambar 2. Setup Pengujian Balok Bench-mark (Vecchio-Shim, 2004)

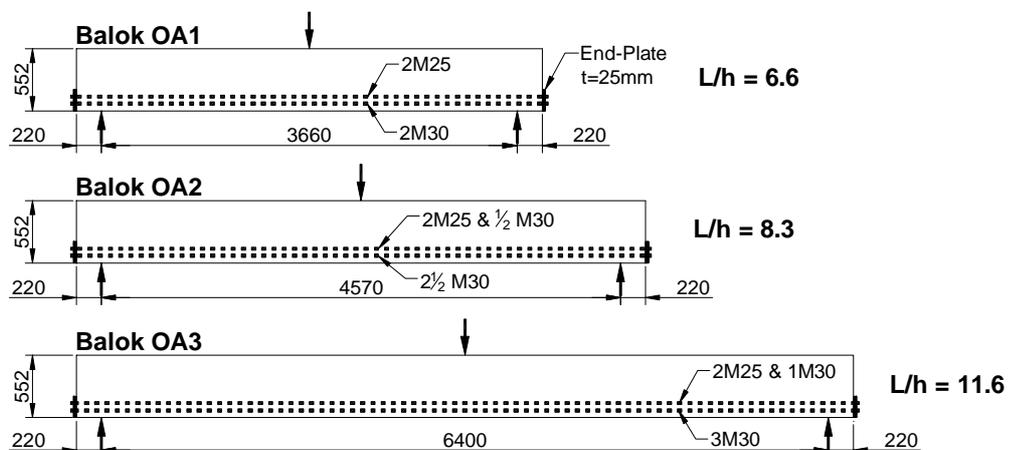
Ketiga balok dalam seri OAi dibedakan dalam hal bentangnya dan juga jumlah tulangan yang digunakan, sebagaimana terlihat pada tabel dan gambar detailnya.

Tabel 1. Data Dimensi dan Penulangan Balok Bench-mark (Vecchio-Shim, 2004)

Kode Balok	b (mm)	h (mm)	d (mm)	L (mm)	Span (mm)	Tulangan Bawah	Tulangan Atas	Sengkang
OA1	305	552	457	4100	3660	2M30, 2M25	-	-
OA2	305	552	457	5010	4570	3M30, 2M25	-	-
OA3	305	552	457	6840	6400	4M30, 2M25	-	-



Gambar 3. Detail Balok Bench-mark (Vecchio-Shim, 2004)



Gambar 4. Elevasi Samping Seri Balok OAi (Vecchio-Shim, 2004)

Untuk mencegah keruntuhan lekatan (*failure bond*) akibat pengankuran tulangan yang tidak mencukupi, maka ditambahkan *end-plate* ($t=25\text{mm}$) pada ujung-ujung balok dan tulangan tarik bawah dijangkarkan pada plat tersebut dengan sambungan las.

Tabel 2. Properti Baja Tulangan

Notasi Rebar	Properti Baja Tulangan				
	Diameter (mm)	Area (mm ²)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	E_s (MPa)
M25 ^a	25.2	500	440	615	210000
M25 ^b	25.2	500	445	680	220000
M30	29.9	700	436	700	200000

^a Seri 2

^b Seri 1 dan 3

Tabel 3. Properti Beton

Kode Balok	Properti Beton			
	f'_c (MPa)	ϵ_0 (mm/mm)	E_c (MPa)	f_{sp} (MPa)
OA1	22.6	0.0016	36500	2.37
OA2	25.9	0.0021	32900	3.37
OA3	43.5	0.0019	34300	3.13

Tabel 4. Hasil Uji Eksperimen Balok Bench-mark

No	Kode Balok	P_U (kN)	δ_U (mm)	Jenis Keruntuhan	W_s -maks (mm)	W_f -maks (mm)	ϵ_y -maks ($\times 10^3$)
1	OA1	331	9.1	D - T	0.25	0.40	0.438
2	OA2	320	13.2	D - T	0.30	0.30	0.548
3	OA3	385	32.4	D - T	0.25	0.35	0.622

Simulasi yang dilakukan adalah untuk menyelidiki perilaku keruntuhan balok eksperimen melalui komputer, yaitu dengan membuat kurva beban-lendutan dari seri Balok OA_i. Selanjutnya pola beban-lendutan yang dihasilkan dibandingkan dengan pola beban hasil eksperimen. Dari pola beban-lendutan tersebut juga dapat diperkirakan besarnya beban runtuh dan lendutan *ultimate* yang terjadi.

4 Beban Batas Menurut SK SNI T-15-1991-03

Sebelum memakai program komputer canggih untuk memprediksi keruntuhan balok beton bertulang, maka ada baiknya ditinjau juga metode perhitungan manual yang sudah menjadi standar dalam perencanaan beton bertulang di Indonesia menurut SK SNI T-15-1991-03.

Ada dua kondisi keruntuhan yang akan ditinjau sebagai berikut.

4.1 Keruntuhan Lentur

Ditinjau penampang balok beton bertulang dalam kondisi *under-reinforced*, keruntuhan lentur dimulai dari tulangan baja yang mengalami leleh. Pada kondisi tersebut, momen nominal yang menyebabkan keruntuhan lentur dapat dihitung dengan rumus berikut :

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right), \text{ dimana } a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

Dari momen nominal yang diperoleh, berdasarkan span balok maka dapat dihitung beban batasnya ($P_u = 4 \cdot M_u / \text{Span}$), sebagai berikut :

Tabel 5. Beban Batas Keruntuhan Lentur

Kode Balok	b (mm)	d (mm)	A_s (mm ²)	f_c MPa	f_y MPa	a	M_u (kN-m)	Span (m)	P_u (kN)
OA1	305	457	2400	22.6	440.5	180.439	387.760	3.66	423.78
OA2	305	457	3100	25.9	437.6	202.032	482.923	4.57	422.69
OA3	305	457	3800	43.5	439.0	147.924	638.984	6.40	399.365

4.2 Keruntuhan Geser

Gaya geser pada seri Balok OAi (tanpa sengkang) sepenuhnya dipikul oleh beton, sedangkan gaya geser nominal yang dapat disumbangkan beton adalah :

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d, \text{ sehingga } P_u = 2 \cdot V_u$$

Selanjutnya beban batas yang menyebabkan keruntuhan geser, diprediksi sebagai berikut :

Tabel 6. Beban Batas Keruntuhan Geser

Kode Balok	b (mm)	d (mm)	f_c MPa	V_c kN	P_u (kN)
OA1	305	457	22.6	110.44	220.88
OA2	305	457	25.9	118.23	236.46
OA3	305	457	43.5	153.22	306.44

4.3 Perilaku Keruntuhan Balok-balok OAi

Dari kedua hitungan diatas, dapat diketahui bahwa beban batas yang menyebabkan keruntuhan pada geser lebih kecil dibanding beban batas yang menyebabkan keruntuhan lentur. Dengan demikian dapat dianggap bahwa kekuatan geser lebih menentukan atau dengan kata lain bahwa keruntuhan geser lebih mendominasi perilaku balok OAi.

5 Pemodelan M.E.H dengan ADINA™

Implementasi pemodelan non-linier dengan m.e.h pada umumnya dilakukan dengan dua cara, yang pertama, perilaku material diprogram terpisah dari elemen, yang kedua, elemen non-linier khusus dibuat dalam satu program. ADINA menggunakan cara yang pertama, tidak ada “elemen khusus” untuk beton tetapi yang ada adalah “material khusus” yaitu “material beton”.

Selanjutnya untuk dapat digunakan harus digabungkan dengan elemen 2D-Solid atau elemen 3D-Solid. Analisis balok akan menggunakan pendekatan plane-stress sehingga digunakan elemen 2-D Solid untuk material beton, sedangkan untuk tulangan akan menggunakan elemen Truss (gaya aksial) yang digabung dengan material bi-linier dari material baja.

5.1 Model Material Beton

Meskipun model material ini dalam Adina disebut “concrete model” tetapi sebenarnya karakteristik konstitutif pada model tersebut dapat juga digunakan untuk memodelkan material jenis lain. Adapun karakteristik dasar dari material yang dimaksud adalah :

- Keruntuhan tarik (*tensile failure*) pada tegangan tarik prinsipal yang relatif rendah
- Keruntuhan pecah tekan (*compression crushing failure*) pada tegangan desak yang besar

- Terjadi pelemahan regangan (*strain softening*) setelah keruntuhan pecah tekan yang berlanjut sampai suatu regangan batas (*ultimate strain*) dimana dalam hal tersebut terjadi keruntuhan material beton secara total.

Material beton dalam program ADINA dianggap sebagai model material yang sangat kompleks yang mungkin tidak memasukkan karakteristik beton yang lengkap, material ini didesain agar juga dapat digunakan pada material lain yang mempunyai karakteristik yang sama, seperti misal batu karang (*rock*) sehingga diharapkan lebih fleksibel pemakaiannya.

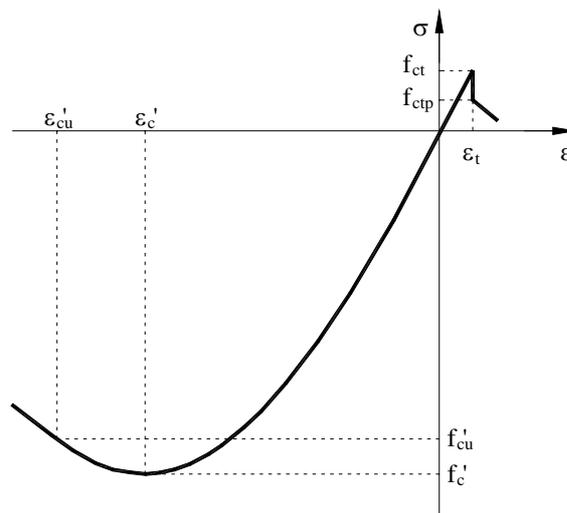
Melihat kenyataan seperti itu, penulis berpendapat bahwa model material beton ini benar-benar untuk memodelkan beton itu sendiri dan belum memasukkan parameter baja tulangan, jadi bukan termasuk model smear material. Selanjutnya baja tulangan akan dimodelkan secara diskrit, terpisah. Oleh karena itulah penelitian ini dibatasi pada model tanpa tulangan sengkang karena pemodelannya relatif lebih sederhana.

Fitur dasar yang digunakan dalam pemodelan beton dalam ADINA adalah :

- Hubungan tegangan-regangan non-linier untuk mengantisipasi pelemahan (*weakening*) akibat bertambahnya tegangan tekan.
- Batas-batas keruntuhan (*failure envelope*) yang menentukan apakah terjadi suatu keruntuhan tarik atau pecah akibat tegangan tekan.
- Strategi dalam memodelkan perilaku material pasca-retak dan pecah

Secara default program telah menyediakan formulasi kurva tegangan-regangan material beton, sedangkan titik-titik kontrol kurva tersebut masih tetap perlu diberikan sebagai input data. Adapun titik kontrol kurva yaitu f_{ctp} , f_{ct} , f'_c , f'_{cu} , ϵ_t , ϵ_c , ϵ_{cu} terlihat pada gambar 5.

Karena model material beton yang digunakan dalam program ADINA ini, dapat digunakan untuk pemodelan tiga dimensi (elemen 3D-Solid) maupun dua dimensi (elemen 2D-Solid) maka diperlukan model material yang mengakomodasi beban dalam berbagai arah (multi-aksial). Dalam hal ini perilaku material 3D secara umum ditunjukkan sebagai hubungan tegangan-regangan multi-aksial dan diperoleh berdasarkan derifasi hubungan tegangan-regangan uni-aksial.



Gambar 5. Hubungan Tegangan-Regangan Uni-aksial Material Beton (ADINA, 2003)

Model material beton di atas berperilaku orthotropik dengan arah yang ditentukan oleh arah tegangan utama, dan bila kemudian timbul retak maka arah tersebut selanjutnya ditetapkan sebagai arah material tersebut.

5.2 Model Material Baja

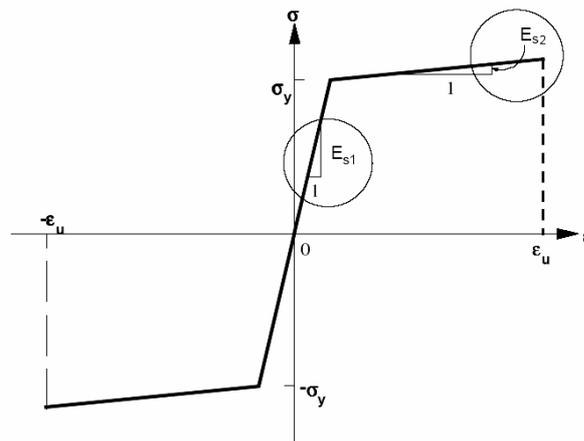
Properti tulangan baja tidak seperti beton, yaitu tidak tergantung dari kondisi lingkungan atau berjalannya waktu. Sehingga menetakannya sebagai hubungan tegangan-regangan tunggal sudah mencukupi untuk mendefinisikan bahan material untuk analisa struktur beton bertulang.

Kurva hubungan tegangan-regangan dari tulangan baja yang digunakan untuk konstruksi beton diperoleh dari uji tulangan yang dibebani secara monotonik tarik. Untuk semua kegunaan praktek, baja memperlihatkan kurva hubungan tegangan-regangan yang sama baik dalam tarik maupun tekan. Hubungan tegangan-regangan memperlihatkan hubungan elastis linier, daerah leleh, daerah *strain hardening* dimana ada pertambahan tegangan bersamaan dengan adanya regangan dan akhirnya daerah yang mengalami penurunan tegangan dan akhirnya drop setelah mengalami fraktur.

Pertambahan daerah leleh merupakan fungsi kekuatan tarik baja. Kuat tarik tinggi, atau baja dengan kadar karbon tinggi, umumnya mempunyai daerah leleh yang kecil dibanding baja kuat rendah sedang atau baja dengan kadar karbon rendah.

Karena baja yang digunakan untuk konstruksi beton adalah dalam bentuk tulangan baja maka tidak diperlukan pemodelan material secara tiga dimensi yang begitu rumitnya. Untuk kemudahan dalam perhitungan numerik, idealisasi baja dalam hubungan tegangan satu dimensi sudah mencukupi.

Dalam studi ini tulangan baja akan dimodelkan sebagai material *elastis-linier* dengan memperhitungkan kondisi *strain hardening* dengan tegangan leleh σ_y . Alasan penggunaan pendekatan tersebut adalah: (1) kemudahan perhitungan model; (2) perilaku struktur beton bertulang sangat dipengaruhi oleh perilaku leleh dari tulangan bilamana struktur dibebani bending momen secara monotonik. Leleh disertai terjadinya pertambahan deformasi struktur. Pada kondisi tersebut jika pemodelan tulangan baja menggunakan konsep model *elastic-perfectly plastic* (bagian plastis merupakan garis horizontal) maka akan terjadi kesulitan numerik dalam mencapai konvergensi pada daerah kuat ultimate, dengan menggunakan model yang memperhitungkan *strain-hardening* maka akan diperoleh kestabilan dalam proses penyelesaian secara numerik (Kwak-Filippou, 1990).



Gambar 6. Kurva Tegangan-regangan Baja Tulangan

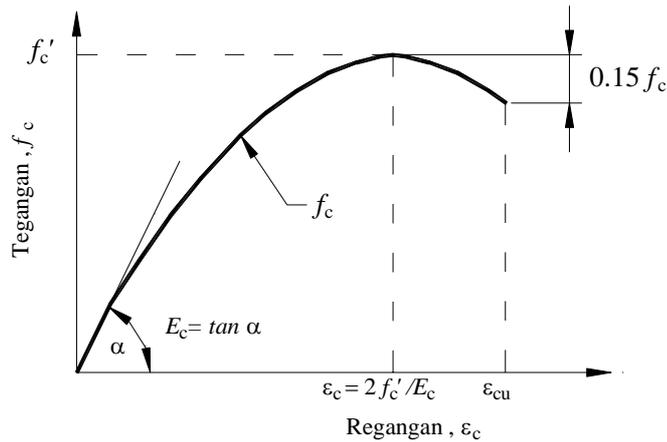
Dalam analisis ini, modulus elastisitas baja pasca leleh (E_{s2}) diambil sebesar 1% dari modulus elastis (E_{s1}). Asumsi bahwa perilaku *strain-hardening* bersifat linier setelah baja tulangan setelah leleh tidak berpengaruh terlalu besar terhadap ketelitian perhitungan selama kemiringan kurva setelah leleh tersebut sama dengan energi regangan kurva hubungan tegangan-regangan baja hasil eksperimen. Model seperti itu telah sukses digunakan dalam banyak analisis struktur beton bertulang (Ngo-Scordelis, 1967).

6 Korelasi Data-data Empiris Material Beton

Data-data yang diperlukan sebagai input pada program ADINA relatif banyak, sedangkan data material beton hasil pengukuran di laboratorium pada umumnya terbatas, yaitu kuat tekan-nya saja. Oleh karena itu diperlukan korelasi terhadap rumus-rumus empiris.

6.1 Perilaku Tekan Uni-aksial

Karena seri Balok OAi tanpa sengkang maka pengaruh kekangan pada material beton tidak ada, untuk itu digunakan kurva tegangan-regangan beton tidak terkekang seperti yang diusulkan Hognested, sebagai berikut :



Gambar 7. Kurva Tegangan-Regangan Beton

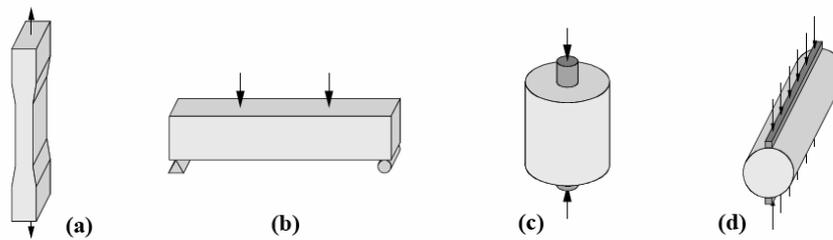
Tegangan tekan maksimum beton dianggap sama dengan tegangan tekan yang diukur pada silinder uji, f'_c dan digunakan untuk memperkirakan kurva tegangan-regangan beton dengan

persamaan parabola yaitu $f_c = f'_c \left[\frac{2 \varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$, sedangkan data modulus elastisitas beton

pada eksperimental balok Toronto sudah ada dan akan dipakai langsung sebagai input data. Bila data tersebut tidak ada maka akan digunakan rumusan dari ACI untuk beton normal yaitu $E_c = 4730 \sqrt{f'_c}$ N/mm², Poisson rasio, $\nu = 0.2$, untuk semua balok uji yang akan dianalisis dengan m.e.h dianggap kondisi regangan ultimate, ε_{cu} , terjadi pada kurva menurun pada diagram tegangan-regangan tepat dimana kuat tekan beton mencapai kondisi $0.85 f'_c$.

6.2 Perilaku Tarik Uni-aksial

Tegangan tarik beton relatif kecil, nilainya sangat bervariasi dan dipengaruhi oleh banyak faktor misalnya tegangan akibat susut yang tertahan. Sehingga dalam praktek perencanaan penampang beton, biasanya tegangan tarik beton diabaikan. Meskipun demikian, pada kondisi tertentu kadang-kadang tidak bisa diabaikan, misalnya: tahanan geser dari balok tanpa sengkang yang kekuatannya tergantung pada tegangan tarik beton. Selain itu, perilaku tarik beton merupakan kunci utama dalam pertimbangan kelayakan pakai (*serviceability*) seperti lebar dan jarak retak, tegangan pada tulangan dan deformasi struktur.



Gambar 8. Macam-macam Cara Uji Tarik : (a) Test Tarik Langsung ; (b) Test Bending atau Modulus Rupture; (c) Test Double Punch; (d) Uji Split Silinder

Pada dasarnya, tegangan tarik beton dapat ditentukan dari test tarik langsung. Meskipun demikian test seperti itu jarang dilakukan bahkan dalam riset sekalipun karena cukup sulit untuk mendapat tegangan tarik aksial yang murni tanpa pengaruh tegangan sekunder akibat alat pemegang benda uji. Umumnya, kuat tarik beton dapat dievaluasi dengan cara test tidak langsung seperti misalnya test bending atau *modulus rupture*, test *double punch* atau uji split silinder. Untuk keperluan umum, memperkirakan tegangan tarik berdasarkan kuat tekan silinder uji f'_c sudah cukup, yaitu; $f_{ct} = 0.33\sqrt{f'_c}$ dalam MPa (Vecchio-Shim, 2004) atau $f_{ct} = 0.3(f'_c)^{2/3}$ dalam MPa (W. Kaufmann, 1998). Dalam penelitian ini, pertama kali akan digunakan usulan dari Vecchio-Shim (2004), selanjutnya nilainya apabila perlu akan disesuaikan bila hal tersebut dapat mempengaruhi beban batas yang dihasilkan, seperti misalnya pada analisis balok OA1 dan OA2.

6.3 Hasil Korelasi Parameter Beton untuk Balok Uji

Berdasarkan rumus-rumus korelasi untuk parameter tekan uni-aksial maka data-data lanjutan yang belum ada dapat diturunkan sebagai berikut :

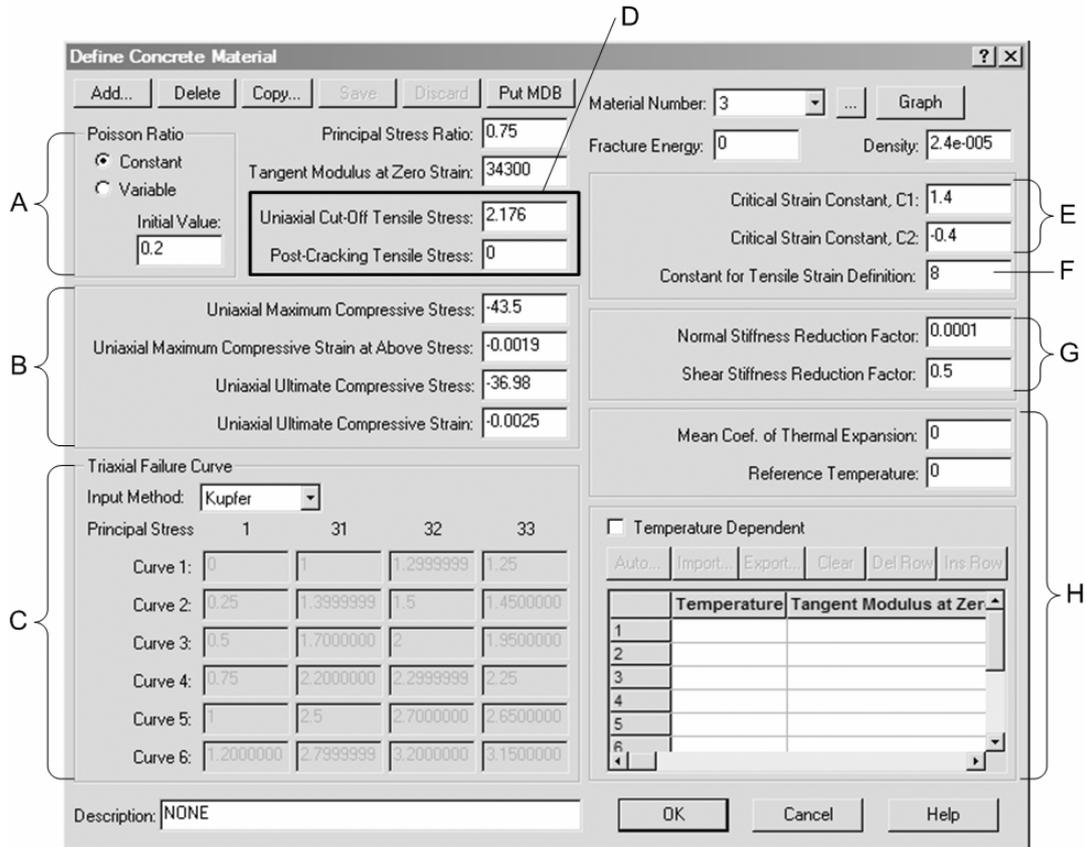
Tabel 7. Parameter Beton untuk ADINA

Kode Balok	Parameter Asli				Parameter Korelasi			
	f'_c MPa	ϵ_0 mm/mm	E_c MPa	f_{sp} MPa	f'_c MPa	f'_{cu} MPa	ϵ_{cu} mm/mm	f_{ct} MPa
OA1	22.6	0.0016	36500	2.37	22.6	19.21	0.0020	1.569
OA2	25.9	0.0021	32900	3.37	25.9	22.01	0.0026	1.679
OA3	43.5	0.0019	34300	3.13	43.5	36.98	0.0025	2.176

Parameter kuat tarik beton tidak diambil dari hasil uji split silinder beton (meskipun tersedia) tetapi untuk analisis awal akan digunakan formulasi yang mengikuti penelitian Vecchio-Shim (2004) maupun Bresler-Scordelis (1963), yaitu $f_{ct} = 0.33\sqrt{f'_c}$.

6.4 Parameter Material Beton dalam Program ADINATM

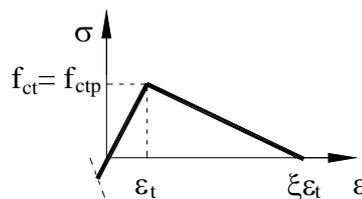
Sebagaimana telah dikemukakan bahwa formulasi material beton merupakan suatu hal yang kompleks (ADINA, 2003). Karena ADINA adalah program komputer yang sudah jadi (*establish*) maka ketelitian hasil dari program tersebut tergantung dari input yang dipakai. Untuk memahami parameter material beton yang dipakai dalam program ADINA maka akan ditinjau tampilan menu parameter material beton balok OA3 berikut :



Gambar 9. Input Data Material Beton ADINA

Mengacu pada notasi yang diberikan pada Gambar 9, maka dapat dijelaskan parameter input data program ADINA, sebagai berikut :

- A. Parameter nilai rasio Poisson, tergantung jenis material, diambil $\nu = 0.2$.
- B. Parameter uni-aksial desak beton, diambil dari Tabel 7.
- C. Parameter data yang digunakan untuk merubah parameter uni-aksial beton seperti yang di-input-kan pada bagian B menjadi parameter multi-aksial, sehingga material beton tersebut dapat digunakan untuk memodelkan keruntuhan beton dalam tiga dimensi. Penulis menggunakan parameter default yaitu parameter multi-aksial dari Kupfer.
- D. Parameter uni-aksial tarik beton, yang berpengaruh pada balok beton bertulang dengan keruntuhan geser. Jika *Post Cracking Tensile Stress* (f_{ctp}) = 0 maka nilainya akan sama dengan nilai pada data *Uniaxial Cut-Off Tensile Stress* (f_{ct}). Data pada bagian ini berhubungan erat dengan input data pada bagian F yaitu yang menyatakan tentang *Constant for Tensile Strain Definition* (ξ).

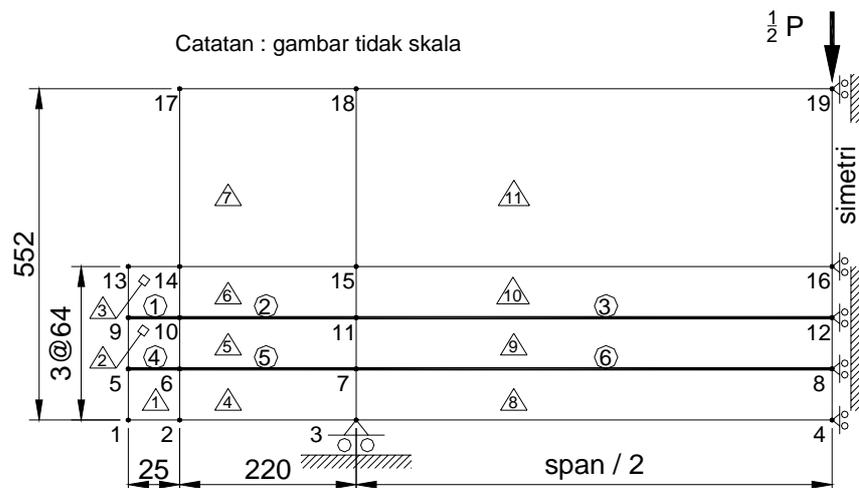


Gambar 10. Parameter Uni-Aksial Tarik Beton

- E. Parameter yang bersifat *engineering judgement* untuk menentukan *material failure envelopes* atau batas keruntuhan suatu material dalam kondisi tegangan multi-aksial, termasuk keruntuhan tarik (*tensile*) atau tekan (*crushing*), berdasarkan data uni-aksial. Nilai diatas adalah nilai default dari program .
- F. Telah dijelaskan dalam bagian D.
- G. Merupakan parameter yang berkaitan dengan *tensile failure envelope* atau batas keruntuhan tarik pada beton. Keruntuhan tarik terjadi jika tegangan tarik pada arah tegangan utama melebihi tegangan runtuh tarik . Pada kasus tersebut dianggap bahwa bidang runtuh terjadi pada arah tegak lurus dari arah tegangan tarik utama tersebut. Pengaruh dengan adanya keruntuhan material tersebut maka kekakuan normal dan geser dan tegangan yang melintas pada bidang runtuh tersebut akan berkurang dan kondisi tegangan bidang dianggap akan timbul pada bidang keruntuhan tarik tersebut.
- H. Merupakan parameter yang berkaitan dengan sifat beton terhadap thermal (tidak dibahas dalam penelitian).

7 Pemodelan M.E.H

Struktur dan pembebanan pada balok *bench-mark* bersifat simetri, oleh karena itu cukup ditinjau separo bagian saja, menggunakan elemen plane stress 8 nodal untuk beton dan elemen truss 3 nodal untuk baja. Dalam pemodelan tersebut *end-plate* sebagai tempat pengangkuran tulangan baja juga turut dimodelkan.



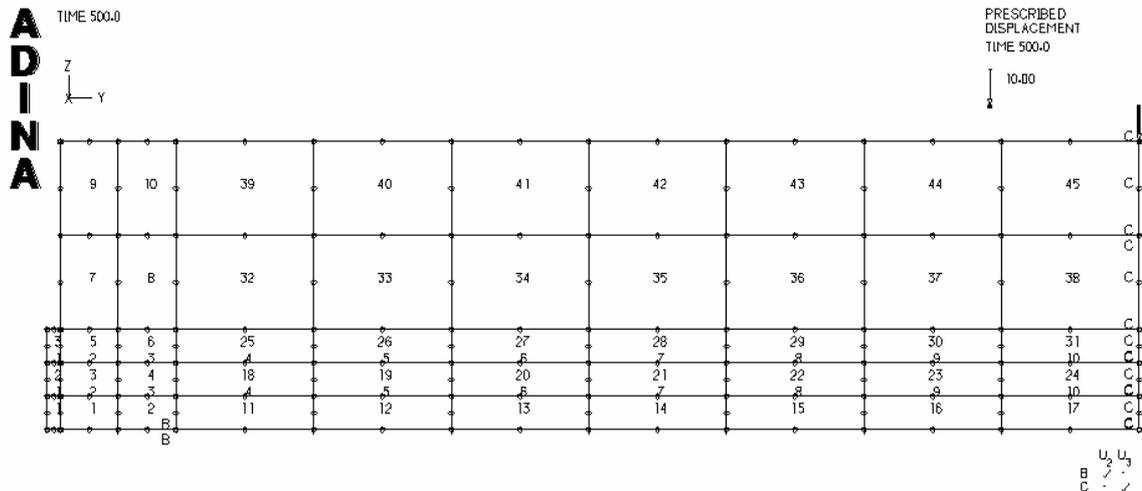
Gambar 11. Sistem Penomoran Nodal, Line dan Surface pada Model Balok-OA1

Dalam pembuatan model m.e.h sebenarnya ADINA termasuk sebagai salah satu perangkat lunak yang paling canggih, yang menyediakan proses *meshing* secara otomatis, tetapi meskipun demikian masih memerlukan objek-objek bantu untuk proses *meshing* tersebut. Objek-objek bantu bisa terdiri dari Node (titik nodal), Line (garis dari dua titik nodal) atau Surface (dibatasi oleh minimum 3 garis).

Pada contoh di atas, objek Line yaitu Line 1 sampai Line 6 harus diidentifikasi secara khusus karena nanti akan dipakai untuk menempatkan elemen Truss untuk mensimulasi tulangan baja secara diskrit, sedangkan objek Line yang lain karena tidak dipakai secara khusus maka diserahkan ke komputer program untuk mendefinisikan secara otomatis. Demikian pula, Surface

1 sampai 3 dipakai untuk memodelkan elemen Solid-2D khusus untuk *end-plate*, sedangkan Surface yang lain untuk elemen Solid-2D beton.

Gambar di atas merupakan sistem penomoran Nodal, Line dan Surface yang merupakan objek bantu dalam pemodelan Balok-OAi. Selanjutnya dengan bantuan option dari program ADINA perlu dibuat *meshing*, yaitu membagi model menjadi elemen-elemen yang lebih kecil untuk memperoleh ketelitian yang memadai.



Gambar 12. Model Balok OA1 setelah proses Meshing

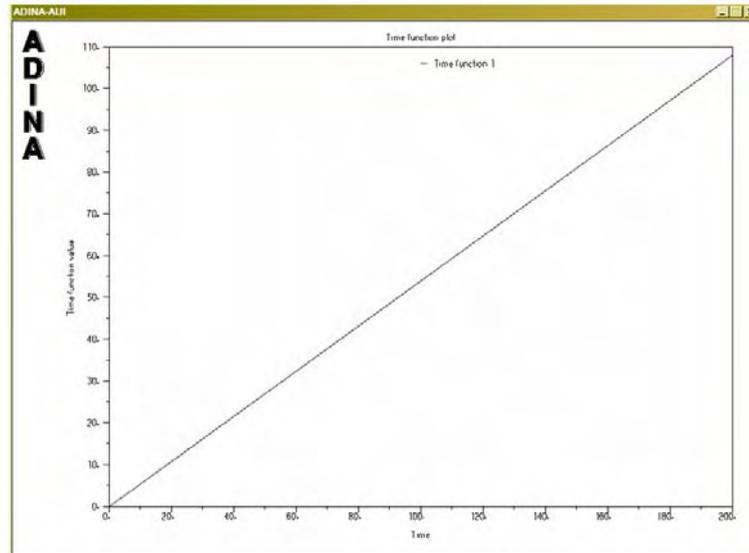
Telah dilakukan percobaan dengan menggunakan meshing yang lebih rapat, meskipun demikian kecuali proses yang lebih lama ternyata besarnya beban runtuh tidak terlalu banyak berbeda (relatif sama). Bentuk meshing yang relatif besar, ternyata digunakan dalam file contoh yang disertakan dalam program ADINA untuk analisis balok beton bertulang. Penggunaan meshing yang tidak terlalu rapat seperti di atas juga menguntungkan pada saat menampilkan gambar retak menggunakan fasilitas ADINA-PLOT yaitu *post-processing* program yang disertakan.

8 Strategi dan Proses Simulasi Uji Beban dengan ADINA

8.1 Strategi Analisis

Proses simulasi keruntuhan model struktur beton bertulang yang dibebani sampai runtuh akan menemui hal-hal yang menyulitkan bila masuk pada bagian yang bersifat non-linier khususnya akibat terjadinya retak (*crack*) dan pecahnya (*crushing*) material beton. Untuk itu proses pembebanan diberikan secara bertahap, pada setiap tahapan beban akan terjadi redistribusi tegangan yang mungkin dapat menimbulkan kerusakan seperti di atas dan bahkan keruntuhan total. Oleh karena itu tambahan beban yang diberikan harus cukup kecil untuk mendapatkan tingkat konvergensi dari iterasi yang dilakukan.

Untuk memperkirakan besarnya beban runtuh maka dapat dilakukan dengan cara coba-coba dengan memanfaatkan option *Control Time Function* dan *Control Time Step*. Kedua option yang tersedia pada program ADINA tersebut dapat digunakan untuk mengatur besarnya kenaikan beban sebagai suatu fungsi tertentu, dalam hal ini diambil sebagai fungsi linier yang monotonik. Fungsi penambahan beban tersebut dapat digambarkan dan sebagai contohnya adalah Gambar 13 untuk pembebanan balok OA2.



Gambar 13. Plot Fungsi Penambahan Beban Inkremental

Sumbu horizontal menunjukkan jumlah inkremental yang diberikan, semakin banyak berarti semakin teliti tetapi juga semakin lama, parameter ini diatur dengan perintah *Control – Time Step*. Sedangkan sumbu vertikal menunjukkan besarnya faktor pengali beban yang dihasilkan dari fungsi beban yang diatur dengan perintah *Control – Time Function*.

Selanjutnya untuk mendapatkan konvergensi dari kekakuan balok yang non-linier maka dipakai proses iterasi Newton-Raphson dengan fasilitas *Line-Searching*. Dalam praktek, bila proses pembebanan inkremental mengalami kegagalan maka option *Automatic Time Stepping (ATS)* diaktifkan, dengan demikian pertambahan beban akan diskalakan secara variabel untuk menghasilkan kondisi yang konvergen.

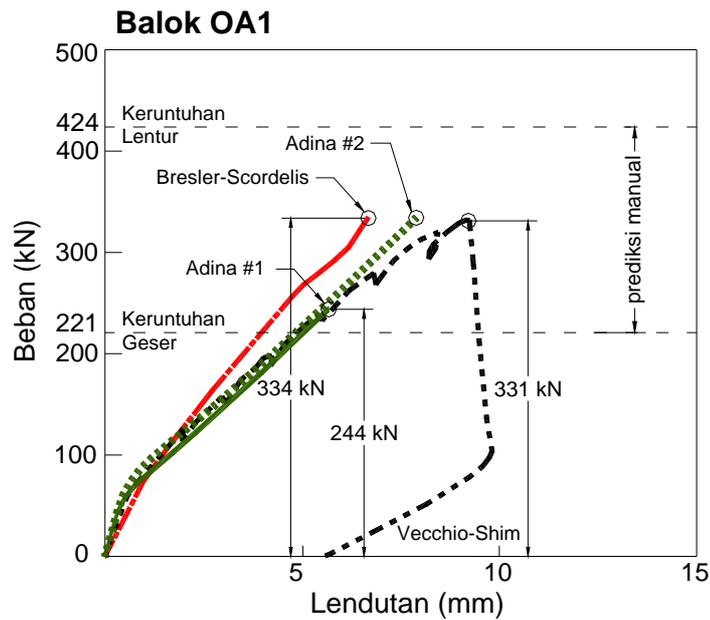
8.2 Identifikasi Keruntuhan Struktur

Keruntuhan lentur diidentifikasi dari bagian kurva beban-lendutan yang menjadi datar (horizontal), dimana kekakuan struktur menjadi nol sehingga menyulitkan dalam proses numerik. Pada keruntuhan geser ternyata berbeda, bagian kurva yang datar tidak selalu dijumpai, meskipun demikian keduanya (lentur / geser) menghasilkan kesulitan numerik yang sama. Proses perhitungan daerah tersebut dapat mengalami 'fail', yaitu iterasi yang tidak mencapai kondisi konvergen. Apabila hal tersebut terjadi maka beban inkremental perlu diperkecil dan proses inkremental ditambah. Program ADINA menyediakan fasilitas penambahan beban secara otomatis yaitu *Automatic Time Stepping (ATS)* dan hal tersebut sangat membantu khususnya untuk mengidentifikasi daerah-daerah mendekati ultimate.

Pemilihan jumlah inkremental dan beban dilakukan secara *trial-error* dan dibandingkan dengan kurva beban-lendutan yang dihasilkan. Selain itu bentuk penyebaran retak pada balok simulasi dapat juga dijadikan pedoman apakah keruntuhan timbul akibat retak (tegangan tarik / geser) atau beton pecah (tekan).

8.3 Analisis Hasil Balok OA1

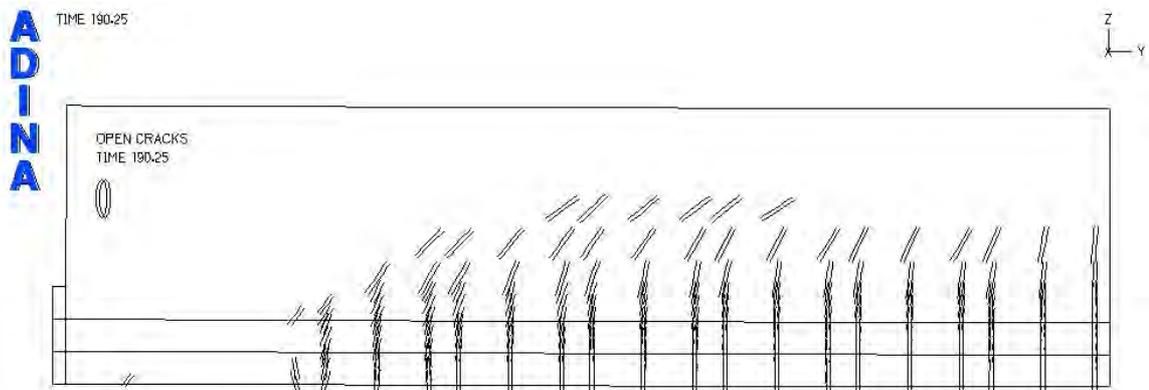
Analisis dengan kontrol lendutan menghasilkan perilaku beban-lendutan mirip hasil eksperimen Vecchio-Shim (2004) dibanding hasil eksperimen Bresler-Scordelis (1963), seperti terlihat pada gambar. Meskipun demikian, berdasarkan data yang disiapkan pada Tabel 7 yang selanjutnya disebut sebagai kurva ADINA #1, pada beban 244 kN (74% hasil eksperimen) analisis mengalami kegagalan (fail / berhenti / iterasi tidak mencapai konvergen), selanjutnya disimpulkan bahwa beban tersebut merupakan beban runtuh.



Gambar 14. Perilaku Keruntuhan Balok OA1

Karena perilaku keruntuhan bersifat tiba-tiba, tanpa memperlihatkan kondisi daktail maka keruntuhannya adalah geser dan bukan lentur seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.

Keruntuhan balok beton tanpa sengkang adalah akibat *diagonal tension*, adanya tegangan tarik arah diagonal yang seharusnya ditahan oleh sengkang, terpaksa dipikul beton itu sendiri dan sepenuhnya tergantung pada kuat tarik material beton. Kondisi keruntuhan tersebut juga ditegaskan dengan fasilitas plot dari program ADINA yang memperlihatkan tidak adanya *crushing* beton tetapi yang ada adalah *open cracks*, sebagai berikut :



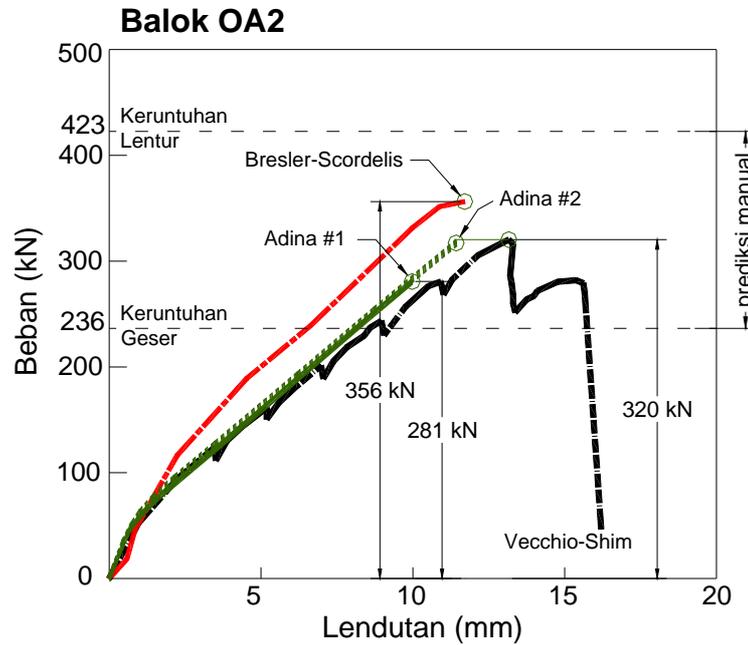
Gambar 15. Kondisi Runtuh Balok OA1

Dengan asumsi seperti itu, selanjutnya dilakukan re-analisis yang menghasilkan kurva ADINA #2. Data kuat tarik beton diatur dengan cara *trial-error* dan ternyata dengan meningkatkan nilai kuat tarik beton menghasilkan beban maksimum yang sama dengan hasil eksperimen Vecchio-Shim. Adapun kuat tarik beton, f_{ct} , pada kurva ADINA#2 tersebut adalah sebesar 2.15 MPa (137% dari f_{ct} asli = 1.569 MPa).

Nilai $f_{ct} = 2.15$ MPa tersebut masih dibawah nilai f_{ct} yang diprediksi oleh Kaufmann (1998) yaitu $f_{ct} = 0.3(f'_c)^{2/3} = 2.4$ MPa .

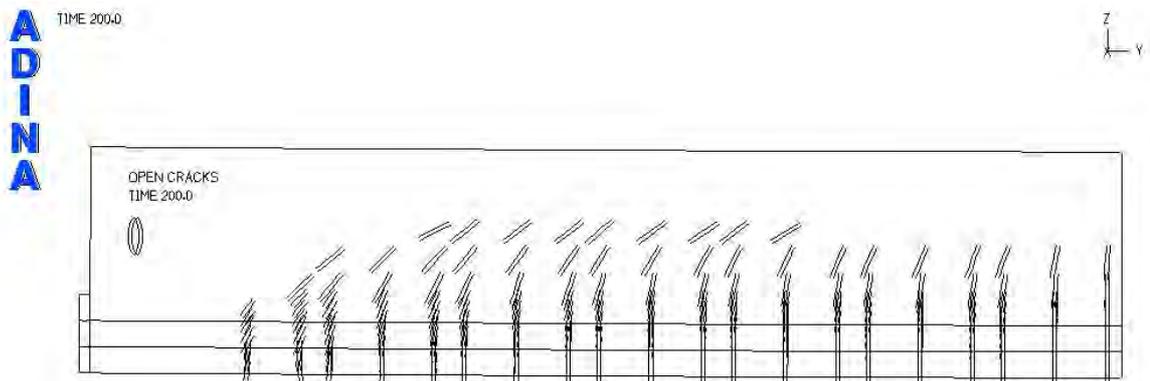
8.4 Analisis Hasil Balok OA2

Beban yang diberikan berupa lendutan yang ditetapkan dalam suatu tahapan atau disebut sebagai kontrol lendutan.



Gambar 16. Perilaku Keruntuhan Balok OA2

Dari data yang disiapkan (ADINA #1), beban maksimum hanya sekitar 89% hasil eksperimen. Pada analisis ke-dua (ADINA #2), kuat tarik beton diatur sedemikian sehingga menghasilkan beban maksimum sama dengan hasil eksperimen, dan diperoleh nilai $f_{ct} = 1.9 \text{ MPa}$ (113% dari f_{ct} asli = 1.679 MPa), nilai tersebut masih dibawah nilai f_{ct} yang diprediksi oleh Kaufmann (1998) yaitu $f_{ct} = 0.3(f'_c)^{2/3} = 2.63 \text{ MPa}$. Kondisi keruntuhan balok OA2 mirip dengan OA1, timbul *open crack* akibat tegangan tarik beton terlampaui, dan tidak ada *crushing* (beton pecah akibat tekan), sebagai berikut :

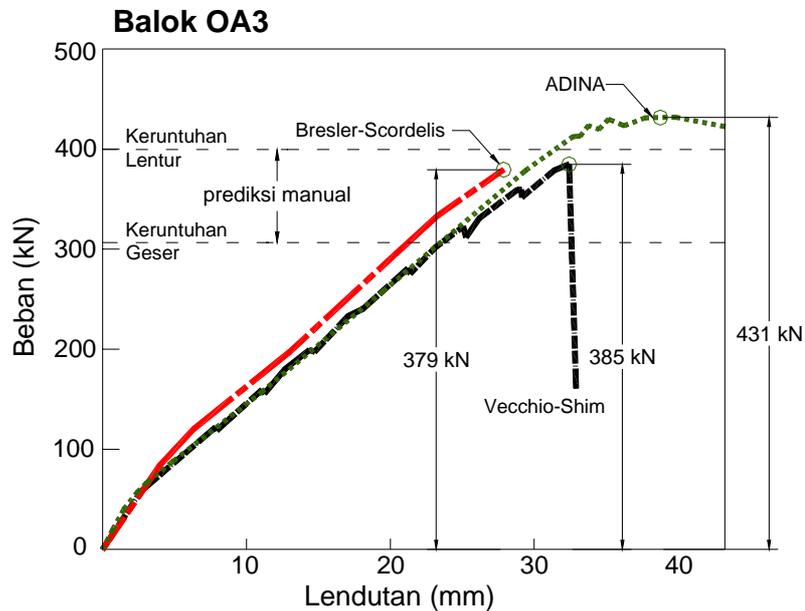


Gambar 17. Kondisi Runtuh Balok OA2

8.5 Hasil Analisis Balok OA3

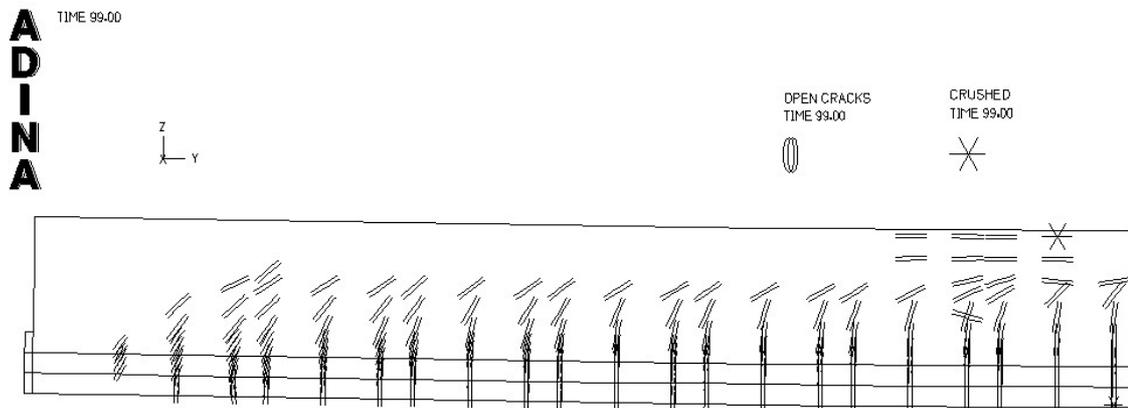
Berbeda dengan tipe balok OA1 dan OA2, dimana besarnya beban maksimum dapat diatur sehingga nilainya sama dengan hasil eksperimen , yaitu dengan merubah f_{ct} (tegangan tarik beton). Ternyata beban maksimum pada Balok OA3 tidak ditentukan dari tegangan tarik beton,

meskipun telah dicoba beberapa nilai f_{ct} yang lebih kecil dengan maksud agar beban maksimumnya turun dan menyamai hasil eksperimen, bentuk kurva tidak berpengaruh. Hasil Adina 10% lebih tinggi dari beban maksimum eksperimen.



Gambar 18. Perilaku Keruntuhan Balok OA3

Selain parameter kritis berbeda dengan balok OA1 dan OA2, maka bentuk kurva beban-lendutan juga berbeda. Pada balok OA3 terlihat kurva yang melengkung menurun seperti yang diperlihatkan oleh keruntuhan material yang bersifat duktail dan umumnya itu disebabkan oleh keruntuhan lentur. Dari fasilitas plot juga terlihat bahwa selain timbul *open crack* maka sudah terjadi juga *crushing* (beton pecah akibat tekan), seperti berikut :



Gambar 19. Kondisi Runtuh Balok OA3

Prediksi bahwa keruntuhan itu lentur juga sesuai bila dibandingkan dengan prediksi manual menurut SK SNI T15-1991, dimana terlihat bahwa kurva beban-lendutan balok OA3, baik yang dihasilkan oleh uji eksperimen maupun analitis berada dekat dengan garis prediksi terjadinya keruntuhan lentur dengan cara manual.

Dari hal-hal tersebut dapat disimpulkan bahwa parameter f_{ct} (tegangan tarik beton) hanya berpengaruh pada keruntuhan geser.

Selain itu yang cukup menarik adalah bahwa rumusan sederhana dalam Standar SK SNI T-15-1991-03 dapat memberikan prediksi yang mencukupi untuk mengetahui beban runtuh pada keruntuhan lentur, sebagaimana diperlihatkan dalam tabel perbandingan berikut :

Tabel 8. Perbandingan Beban Runtuh Balok OA3

Cara Analisis	Pu (kN)	%	%-error	Keterangan
Manual	399	100.0%	.0%	SK SNI T-15-1991-03
ADINA	431	108.0%	+ 8.0%	M.E.H non-linier
Bresler-Scordelis	379	95.0%	- 5.0%	eksperimen
Vecchio-Shim	385	96.5%	- 3.5%	eksperimen

9 Kesimpulan

Dari simulasi komputer keruntuhan balok beton bertulang tanpa sengkang dengan program ADINA maka dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

- Program komputer ADINA mempunyai fasilitas lengkap untuk simulasi test beban struktur beton bertulang sampai runtuh, tetapi hasilnya sangat dipengaruhi oleh parameter input data yang dipakai, ada yang dari pengukuran laboratorium, korelasi dengan rumus empiris, bahkan ada yang bersifat *engineering judgement* . Jadi hasil program tersebut sifatnya prediksi perilaku keruntuhan saja.
- Agar dapat dipakai sebagai simulasi test beban sampai runtuh maka sebaiknya dilakukan *bench-marking* terlebih dahulu dengan test beban eksperimental, dengan demikian dapat diketahui apakah parameter input data yang digunakan sudah tepat atau belum.
- Sifat keruntuhan balok beton tanpa tulangan sengkang tergantung dari rasio bentang (L) dan tinggi balok (h). Untuk rasio yang kecil atau kategori balok tinggi maka keruntuhan geser akan mendominasi balok tersebut, seperti yang diperlihatkan pada perilaku balok OA1 (ratio L/h=6.6) dan OA2 (rasio L/h=8.3). Keruntuhan geser secara fisik ditandai dengan timbulnya retak arah diagonal akibat adanya *diagonal tension* (DT) seperti yang diperlihatkan pada gambar 15 dan 17.
- Pada balok OA3 (rasio L/h=11.5) , perilaku lentur mulai dominan, sifat keruntuhan daktail. Balok runtuh karena terjadi *crushing* (pecah) akibat tekan (Gambar 19). Besarnya beban runtuh simulasi dengan eksperimen masih ada selisih, hal itu menunjukkan bahwa parameter beton tekan uni-aksial perlu perbaiki.
- Balok tanpa sengkang dengan keruntuhan geser, kekuatannya sangat tergantung dari kuat tarik material beton yang digunakan. Semakin besar kuat tariknya maka beban runtuh yang diperlukan untuk keruntuhan geser semakin besar.
- Meskipun sudah ada data hasil *split-test* beton di laboratorium, tetapi besarnya kuat tarik material beton pada umumnya masih mengandalkan rumus empiris yang didasarkan dari kuat tekan beton. Kuat tarik beton sebesar $f_{ct} = 0.33\sqrt{f'_c}$ (MPa) seperti yang diusulkan Bresler-Scordelis (1963) maupun yang juga digunakan oleh Vecchio-Shim (2004) dalam analisisnya, ternyata untuk program ADINA masih terlalu kecil. Hal tersebut ditunjukkan dengan besarnya beban runtuh yang relatif lebih kecil dibanding hasil uji balok eksperimental. Untuk mendapatkan prediksi yang mendekati eksperimental maka nilai kuat tarik beton harus diperbesar, meskipun demikian pembesaran tersebut masih lebih kecil dari nilai kuat tarik beton yang diusulkan Kaufmann (1998) yaitu $f_{ct} = 0.3(f'_c)^{2/3}$ (MPa) .

- g) Meskipun pemodelan balok OA1, OA2 dan OA3 mirip, dan bersifat parametrik , tetapi hasilnya berbeda satu sama lain , khususnya balok OA3 dengan balok lainnya. Itu menunjukkan bahwa analisa non-linier beton berbeda dengan analisa linier yang sifatnya lebih pasti .
- h) Untuk balok dengan keruntuhan lentur maka rumus momen ultimate berdasarkan ketentuan yang digunakan dalam peraturan perencanaan seperti Standar SK SNI T-15-1991-03 menghasilkan nilai yang mendekati atau cukup teliti.
- i) Nilai yang digunakan untuk memprediksi keruntuhan geser yaitu $v_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c}$ cukup konservatif, hal itu ditunjukkan pada semua kasus bahwa beban runtuh yang terjadi semua berada jauh diatas beban runtuh yang diprediksi dengan rumus tersebut.
- j) Untuk mengevaluasi besarnya beban runtuh dari struktur balok beton bertulang maka penggambaran kurva beban-lendutan selama proses pembebanan struktur tersebut adalah mutlak. Kurva tersebut juga dapat digunakan menyelidiki perilaku keruntuhan struktur, apakah daktail atau tidak, suatu sifat yang penting yang dapat meningkatkan keamanan dari struktur tersebut.

10 Ucapan Terimakasih

Peneliti mengucapkan terima kasih yang tulus kepada Dr. Ir. Paulus Karta Wijaya (UNPAR) atas diskusi dan bantuan penggunaan program ADINA, juga kepada Ir. Iswandi Imran, Ph.D. (ITB) atas saran-saran yang diberikan selama penelitian ini.

11 Daftar Pustaka

1. ADINA System 8.1 Release Notes, June 2003 :
 - o Report ARD 03-6: ADINA User Interface Primer
 - o Report ARD 03-7: Theory and Modeling Guide, “Volume I : ADINA”
 - o Report ARD 03-10: ADINA Verification Manual
2. Bresler. B, dan Scordelis A.C., “Shear strength of reinforced concrete beam”, *Journal American Concrete Institute*, 60(1), 51-72, 1963
3. Ngo, D., dan Scordelis,A.C., “Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams”, *ACI Journal* , March 1967
4. Kwak, H.G. dan Filippou, F.C. “Finite Element Analysis Of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads”, *Report No. UCB/SEMM-90/14*, UC-Berkeley, California, 1990
5. Vecchio, F.J., “Non-Linear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete : at the crossroads?”, *Structural Concrete 2001*, 2. No.4, December, 201-212
6. Vecchio, F.J. dan Shim, W. , “Experimental and Analytical Re-examination of Classic Concrete Beam Tests”, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol.130, No. 3, 2004
7. Vecchio, F.J., Bentz, E.C., dan Michael P. Collins, “Tools For Forensic Analysis Of Concrete Structures”, *Computers and Concrete*, Vol. 1, No. 1, 2004
8. Walter Kaufmann, “Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces”, *Doctoral Thesis : Institute of Structural Engineering, Swiss Federal Institute of Technology Zurich*, July 1998